SOLUZIONI II ESONERO CP1 A.A. 2001-2002

Esericizio # 1 Per quanto definito nel testo abbiamo che:

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \max(X_1, X_2, X3))$$

essendo le 3 v.a. in questione i.i.d. , uniformi nell' intervallo $(0,1)$, abbiamo facilmente:

$$P(X \leq t) = t^3$$

da cui ricaviamo la densità:

$$f_X(t) \equiv \begin{cases} 3t^2 & t \in (0,1) \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Per il calcolo della media della X basta considerare:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 3t^3 dt = \frac{3}{4} t^4 \,|_0^1 = \frac{3}{4}$$

Per rispondere al secondo punto dell' esercizio si può considerare la variabile aleatoria $X^{'} \equiv 1 - X$ ottenendo:

$$\mathbb{P}(X^{'} \geq t) = (1-t)^3 \; , \; \mathbb{E}\left(X^{'}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Esericizio # 2
Chiaramente:

$$\mathbb{P}(min(X_1, X_2) \leq t) = 1 - \mathbb{P}(min(X_1, X_2) > t)$$

Poichè le v.a. in questione sono indipendenti, definita $Z \equiv min(X_1, X_2)$, abbiamo:

$$P(Z > t) = e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

Inoltre: $f_Z(t) = (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$. Analogamente si procede nel caso in cui si definisca un' altra v.a. $Y \equiv \sqrt{Z}$, ottenendo:

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(Z \leq t^2)$$

cosicché $f_Y(t) = \lambda e^{-\lambda t^2} 2t$, avendo posto $\lambda \equiv \lambda_1 + \lambda_2$. Il calcolo della media di Y si effettua facilmente integrando per parti la funzione $2\lambda t^2 e^{-\lambda t^2}$ nell'intervallo $[0, \infty)$ e ricordando che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$ si ha infine $\mathbb{E}(Y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$.
Esericizio # 3

Fissato ϵ poiché la media della somma di n v.a. di distribuzione $\Gamma(2,1)$ è pari a 2, posto $X = \sum_{i=1}^n X_i \equiv X$, abbiamo:

$$\frac{a_n}{n} = \mathbb{E}(X) = 2 \to a_n = 2n$$

Ponendo $\delta_n \equiv \sqrt{nVar(X)t}$ con $2\left(1 - \phi(t)\right) = \epsilon$ abbiamo $Var\left(X\right) = 2$ da cui ricaviamo $\delta_n = \sqrt{2nt(\epsilon)}$.

Esericizio # 4

Per rispondere alla prima domanda calcoliamo:

$$\mathbb{P}\left(4X_1 + 3X_2 < X_3 + X_4\right) = \mathbb{P}\left(X_3 + X_4 - 4X_1 - 3X_2 > 0\right)$$

Poiché la v.a. $X \equiv X_3 + X_4 - 4X_1 - 3X_2$ e ancora una v.a. gaussiana di media nulla la probabilità cercata è pari a 0.5.

Per il secondo punto, considerando che la v.a. Y è discreta, il doppio integrale della densità congiunta sul dominio definito dalla relazione $X < Y$ viene sostituito da:

$$\sum_{1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 1 - e^{-\lambda}$$

Si noti che la somma parte da 1 essendo $\mathbb{P}(X < 0) = 0$. Ovviamente:

$$\mathbb{P}(X \leq t \mid X \leq Y) = \frac{P(X \leq t, Y \geq 1)}{1 - e^{-\lambda}} = t$$

Esericizio # 5

La misura invariante è:

$$\pi_1 = \pi_4 = (1 - \varepsilon)/2\ ,\ \pi_2 = \pi_3 = \varepsilon/2$$

risultato che si ottiene facilmente calcolando esplicitamente oppure deducendolo per mezzo della simmetria di P.
Si noti che la catena è irriducibile, π è l'unica misura invariante ed è reversibile.
Se $X_0 = 1$ c'è un solo modo di raggiungere 4 in tre passi:

$$X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 4$$

ne viene che:

$$(X_3 = 4 | X_0 = 1) = \varepsilon^2(1 - \varepsilon)$$

Per simmetria otteniamo anche che:

$$(X_3 = 1 | X_0 = 4) = \varepsilon^2(1 - \varepsilon)$$

Se $X_0 = 1$ ci sono due modi di raggiungere 4 in quattro passi:

$$X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 4, X_4 = 4$$

oppure:

$$X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4$$

Quindi $(X_4 = 4 | X_0 = 1) = 2\varepsilon^2(1 - \varepsilon)^2$.