ESAME DEL 19 GIUGNO 2002

PROF. F. MARTINELLI

Esercizio 1. Dimostrare che $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$. Usando l'induzione su n dimostrare poi che $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_1) - (n-1)$

Esercizio 2. Un'urna contiene b palline bianche e n nere. Una pallina viene estratta e rimpiazzata con $d+1$ palline del suo stesso colore, dove d è un numero intero.

i) Calcolare la probabilità che la seconda estrazione dia una pallina bianca.
ii) Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia nera sapendo che la seconda estratta è nera.

Esercizio 3. Siano X_1, X_2 variabili indipendenti uniformi su $(0,1)$. Calcolare la densità di probabilità del prodotto $Y := X_1 X_2$.

Esercizio 4. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili indipendenti uniformi su $(0,1)$.

i) Sia $Z_n := \#\{i \leq n \,:\, X_i \in (0, \frac{\lambda}{n}), \lambda > 0$. Calcolare per ogni k intero $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)$.
ii) Sia $Y := \#\{i \leq n \,:\, X_i \in (0, \frac{1}{3})$. Calcolare approssimativamente $\mathbb{P}(\frac{n}{3} \leq Y \leq \frac{n}{3} + 1)$ per grandi valori di n.
iii) Stimare dall'alto $\mathbb{P}(Y > \frac{n}{2}$.

Esercizio 5. Sia $X = \{1,2\}$ e si consideri su X la misura di probabilità $\pi(1) = \frac{1}{4}$ e $\pi(2) = \frac{3}{4}$. Costruire una catena di Markov ergodica su X tale che la sua misura invariante sia proprio π. Giustificare tutti i passaggi.

Esercizio 6. Discutere illustrando con esempi due tra i seguenti.

(i) Distribuzione esponenziale, distribuzione Gamma e processo di Poisson.
(ii) Variabili casuali indipendenti.
(iii) Densità di probabilità per $Y = g(X)$, con X variabile continua e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(iv) Catene di Markov ergodiche: definizioni e proprietà.

E-mail address: `martin@mat.uniroma3.it`

Date: June 18, 2002.