Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2001/2002

CAM - Complementi di Analisi Matematica 1

SCRITTO (03-06-02)

CORREZIONE

<u>ESERCIZIO 1.</u> Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$I(x) = \int \frac{1+e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione. Ponendo

$$y = e^x, \qquad \mathrm{d}y = e^x\mathrm{d}x = y\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y},$$

si ha

$$I(x) = \int \frac{\mathrm{d}y}{y}\,\frac{1+y^2}{\sqrt{1+y}}.$$

Possiamo quindi effettuare l'ulteriore sostituzione

$$t = \sqrt{1+y}, \qquad y = t^2-1, \qquad \mathrm{d}y = 2t\mathrm{d}t,$$

così che si ottiene

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{2t\mathrm{d}t}{t^2-1}\,\frac{1+(t^2-1)^2}{t} = 2\int\left(\frac{1}{t^2-1}+(t^2-1)\right)\mathrm{d}t \\ &= 2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} + \int t^2\,\mathrm{d}t - 2\int \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

dove

$$\int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3,$$
$$\int \mathrm{d}t = t,$$

mentre

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \frac{1}{2}\left(\ln|t-1| - \ln|t+1|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|.$$

In conclusione si ha

$$\begin{aligned} I(x) &= 2\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{3}t^3 - t\right) = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{2}{3}t^3 - 2t \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{1+y}-1}{\sqrt{1+y}+1}\right| + \frac{2}{3}(1+y)^{3/2} - 2\sqrt{1+y} \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} - 2\sqrt{1+e^x}. \end{aligned}$$

<u>ESERCIZIO 2.</u> Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$I(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+6}}.$$

Soluzione. Possiamo scrivere

$$x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2,$$

quindi possiamo effettuare la sostituzione

$$y = x - 2, \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}x,$$

e ottenere

$$I(x) = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+2}}.$$

Operando ora la sostituzione

$$t = \sqrt{y^2+2} - y, \qquad y = \frac{2-t^2}{2t}, \qquad \sqrt{y^2+2} = \frac{2+t^2}{2t}, \qquad \mathrm{d}y = -\frac{2+t^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t,$$

si ottiene

$$I(x) = -\int \frac{1}{\frac{2+t^2}{2t}} \frac{2+t^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t|.$$

Quindi

$$\begin{aligned} I(x) &= -\ln|t| = -\ln\left|\sqrt{y^2+2} - y\right| = \ln\left|\sqrt{y^2+2} + y\right| \\ &= \ln\left|\sqrt{x^2-4x+6} + x - 2\right|. \end{aligned}$$

<u>Esercizio 3.</u> Studiare l'esistenza del seguente integrale improprio:

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2\alpha x + 1},$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. L'equazione $x^2 + 2\alpha x + 1 = 0$ ammette le radici

$$x = x_\pm(\alpha) = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Distinguiamo i seguenti casi.

(1) $\alpha^2 > 1$. In tal caso le due radici sono reali e distinte, quindi possiamo scrivere

$$x^2 + 2\alpha x + 1 = (x - x_-(\alpha))\,(x - x_+(\alpha)).$$

Inoltre $\sqrt{\alpha^2-1} < |\alpha|$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, quindi le due radici $x_\pm(\alpha)$ sono entrambe negative per $\alpha > 0$ ed entrambe positive per $\alpha < 0$.

Per a reale la funzione

$$\frac{1}{x-a}$$

ha una singolarità non integrabile in un intorno di a. Quindi la funzione

$$\frac{1}{x^2+2\alpha x+1} = \frac{1}{x - x_-(\alpha)}\,\frac{1}{x - x_+(\alpha)}$$

è non integrabile se almeno una delle due radici $x_\pm(\alpha)$ è positiva. Per quanto visto sopra possiamo quindi concludere che l'integrale I non esiste per $\alpha^2 > 1$ tale che $\alpha < 0$, *i.e.* per $\alpha < -1$, mentre esiste per $\alpha^2 > 1$

tale che $\alpha > 0$, *i.e.* per $\alpha > 1$.
(2) $\alpha^2 = 1$. In tal caso si ha

$$x^2 + 2\alpha x + 1 = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{se } \alpha = 1 \ , \\ (x-1)^2, & \text{se } \alpha = -1 \ , \end{cases}$$

quindi se $\alpha = 1$ si ha $x + 1 \geq 1$ per $x \geq 0$, e quindi l'integrale I esiste, mentre se $\alpha = -1$ le due radici coincidenti $x = 1$ cadono nell'intervallo d'integrazione, e quindi l'integrale I non esiste.
(3) $\alpha^2 < 1$. In tal caso le due radici $x_\pm(\alpha)$ sono complesse coniugate e quindi

$$x^2 + 2\alpha x + 1 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

possiamo perciò concludere che per $|\alpha| < 1$ l'integrale I esiste sempre.

In conclusione l'integrale I esiste per

$$\alpha \in (-1, 1) \cup \{1\} \cup (1, +\infty) \Rightarrow \alpha \in (-1, +\infty).$$

<u>Esercizio 4.</u> Studiare l'esistenza del seguente integrale improprio:

$$I = \int_1^\infty \frac{\sin^3 x \ln x}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Soluzione. Possiamo scrivere

$$\sin^3 x = \sin x \sin^2 x = \sin x \left(1 - \cos^2 x\right) = \sin x - \sin x \cos^2 x.$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2, \\ I_1 &= \int_1^\infty \frac{\sin x \ln x}{x} \, \mathrm{d}x, \\ I_2 &= -\int_1^\infty \frac{\sin x \cos^2 x \ln x}{x} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Studiamo i due integrali I_1 e I_2 separatamente.

Per I_1 si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^\infty \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x \right) \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x = - \cos x \, \frac{\ln x}{x} \bigg|_1^\infty + \int_1^\infty \cos x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\ln x}{x} \right) \mathrm{d}x \\ &= -0 + \frac{\cos 1 \ln 1}{1} + \int_1^\infty \cos x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} \left(1 - \ln x\right) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

dove l'ultimo integrale converge poiché all'infinito le funzioni $x^{-\alpha}$ e $x^{-\alpha} \ln x$ sono integrabili all'infinito per ogni $\alpha > 1$ (e quindi in particolare lo sono per $\alpha = 2$) e $|\cos x| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: quindi la funzione

$$\frac{\cos x}{x^2} \left(1 - \ln x\right)$$

è assolutamente integrabile, e quindi integrabile, in $[1, \infty)$. Possiamo perciò concludere che l'integrale improprio I_1 esiste.

Si ragiona in maniera analoga per I_2 ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^\infty \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\frac{\cos^3 x}{3}\right)\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\cos^3 x}{3}\frac{\ln x}{x}\bigg|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos^3 x}{3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\frac{\ln x}{x}\right)\mathrm{d}x \\ &= 0 - \frac{1}{3}\frac{\cos^3 1 \ln 1}{1} - \frac{1}{3}\int_1^\infty \cos^3 x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}\int_1^\infty \cos^3 x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

dove di nuovo l'ultimo integrale converge, poiché anche la funzione

$$\frac{\cos^3 x}{3x^2}(1 - \ln x)$$

è assolutamente integrabile, e quindi integrabile, in $[1, \infty)$. Possiamo perciò concludere che anche l'integrale improprio I_2 esiste, e quindi esiste l'integrale improprio I.

<u>Esercizio 5.</u> Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\mathrm{e}^x - \cos x - \sin x\right)}{x \operatorname{tg} x}.$$

Soluzione. Si può utilizzare la formula di Taylor. Poiché

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5),$$

si può espandere il denominatore in

$$x \operatorname{tg} x = x^2 + \frac{x^4}{3} + O(x^6) = x^2 + O(x^4),$$

e quindi è sufficiente sviluppare il numeratore fino al secondo ordine (incluso). Si ha

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), \\ \sin x &= x + O(x^3), \\ \mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3), \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathrm{e}^x - \cos x - \sin x = 1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 + \frac{x^2}{2} - x + O(x^3) = x^2 + O(x^3),$$

da cui si ottiene, riutilizzando lo sviluppo della funzione $\sin x$, con x sostituito da $x^2 + O(x^3)$,

$$\sin\left(\mathrm{e}^x - \cos x - \sin x\right) = x^2 + O(x^3).$$

In conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\mathrm{e}^x - \cos x - \sin x\right)}{x \operatorname{tg} x} = 1.$$

<u>Esercizio 6.</u> Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1+x}{x^2}}.$$

Soluzione. Poiché
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$
possiamo scrivere
$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\dfrac{1+x}{x^2}} = \exp\left(\frac{1+x}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}\right),$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\dfrac{1+x}{x^2}} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}\right),$$
essendo l'esponenziale una funzione continua.

Calcoliamo quindi
$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}(1+x)\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2}.$$
Si può utilizzare la formula di Taylor. Poiché il denominatore è x^2 è sufficiente sviluppare il numeratore fino al secondo ordine (incluso). Si ha
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) = 1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4),$$
e, tenendo conto che risulta
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3),$$
si ottiene
$$\ln\frac{\sin x}{x} = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)\right) = -\frac{x^2}{6} + O(x^4),$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2} = -\frac{1}{6}.$$
In conclusione
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\dfrac{1+x}{x^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.$$

<u>Esercizio 7.</u> Studiare il grafico della seguente funzione:
$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(x^2-1\right), & x \le 0, \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & x > 0, \end{cases}$$
e studiare la regolarità della funzione $f(x)$ in $x = 0$.

Soluzione. Studiamo separatamente le due funzioni
$$g(x) = x^2\left(x^2-1\right),$$
$$h(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

La funzione $g(x)$ è pari (*i.e.* $g(x) = g(-x)$), quindi è sufficiente studiare il grafico per $x \geq 0$ (a noi poi interesserà la parte $x \leq 0$).

Notiano subito che $g(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \infty.$$

Si ha inoltre

$$\begin{aligned} g(x) &= x^4 - x^2 = x^2 \left(x^2 - 1\right), \\ g'(x) &= 4x^3 - 2x = 2x \left(2x^2 - 1\right), \\ g''(x) &= 12x^2 - 2 = 2 \left(6x^2 - 1\right), \end{aligned}$$

Quindi si ha $g'(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x = 1/\sqrt{2}$: per $x > 1/\sqrt{2}$ si ha $g'(x) > 0$ e quindi $g(x)$ è crescente, mentre per $0 < x < 1/\sqrt{2}$ si ha $g'(x) > 0$ e quindi $g(x)$ è decrescente.

Per $x = x_0 \equiv \sqrt{1/6}$ si ha $g''(x) = 0$ e quindi un punto di flesso: per $x < x_0$ la funzione $g(x)$ è concava, mentre per $x > 0$ la funzione $g(x)$ è convessa.

Quindi il grafico di $g(x)$ è come rappresentato in Figura 1.

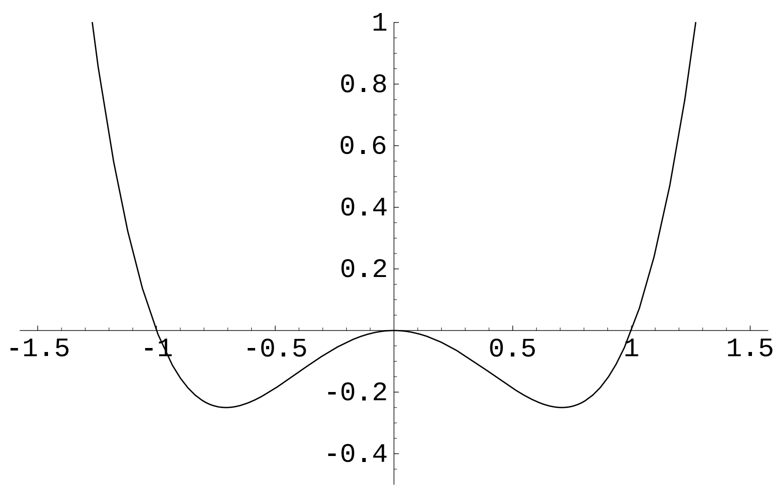

Figura 1. Grafico della funzione $g(x)$ dell'esercizio 7.

Riguardo alla funzione $h(x)$ si ha

$$\begin{aligned} h(x) &= \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \\ h'(x) &= \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \\ h''(x) &= \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^6}\left(2 - 3x^2\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

La funzione $h(x)$ è definita per ogni $x \neq 0$, e si ha

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} h(x) = 1.$$

Inoltre $h(x)$ è pari, quindi possiamo considerare solo $x \geq 0$. Per $x > 0$ la funzione $h(x)$ è crescente e ha un flesso in $x = x_1 \equiv \sqrt{2/3}$: per $x < x_1$ la funzione è convessa e per $x > x_1$ è concava.

Quindi il grafico di $h(x)$ è come rappresentato in Figura 2.

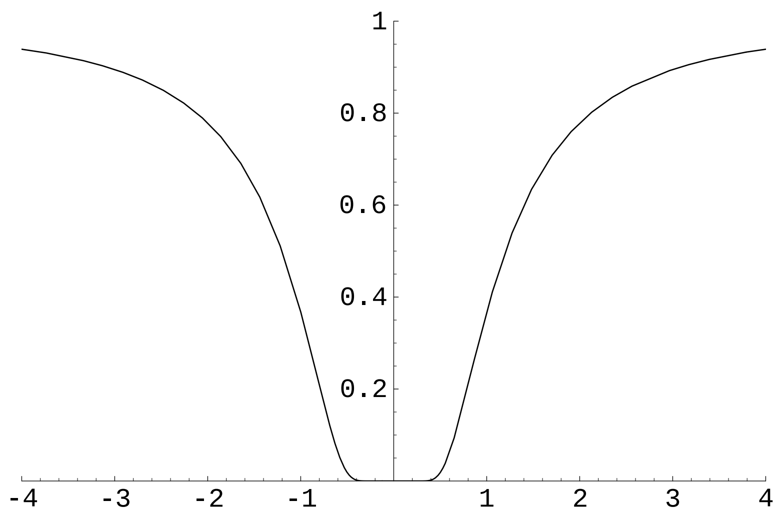

Figura 2. Grafico della funzione $h(x)$ dell'esercizio 7.

Dai due grafici trovati si ottiene il grafico della funzione $f(x)$: cfr. la Figura 3.

I due grafici si raccordano in $x = 0$: quindi la funzione $f(x)$ è continua in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} h(x) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

come è facile verificare, mentre

$$g(0) = 0, \qquad g'(0) = 0, \qquad g''(0) = -2,$$

così che possiamo concludere che $f(x)$ è di classe C^1, ma non di classe C^2.

<u>Esercizio 8.</u> Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \left| \frac{x-2}{x^2-1} \right| .$$

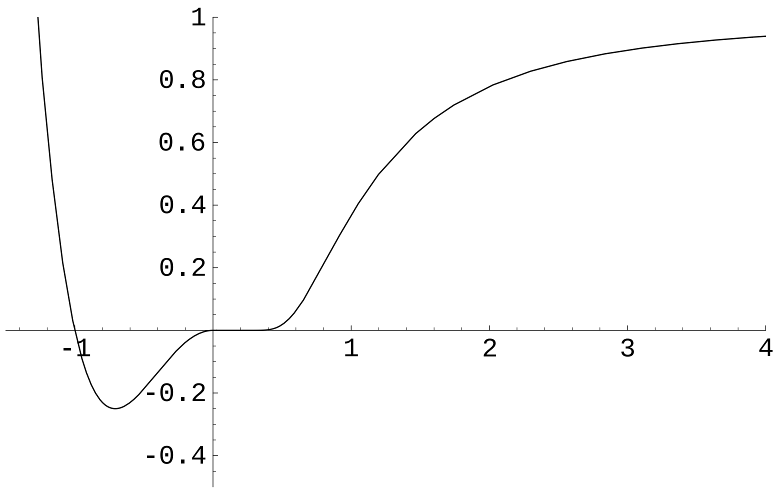

Figura 3. Grafico della funzione $h(x)$ dell'esercizio 7.

Soluzione. Studiamo preliminarmente la funzione

$$g(x) = \frac{x-2}{x^2-1},$$

tale che $f(x) = |g(x)|$. La funzione è definita per ogni $x \neq \pm 1$, e risulta

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0^{\pm}, \qquad \lim_{x\to -1^{\pm}} g(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 1^{\pm}} g(x) = \mp\infty.$$

Si ha inoltre, per ogni $x \neq \pm 1$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x-2}{x^2-1}, \\ g'(x) &= -\frac{1}{\left(x^2-1\right)^2}\left(x^2-4x+1\right), \\ g''(x) &= \frac{2}{\left(x^2-1\right)^3}\left(x^3-6x^2+3x-2\right). \end{aligned}$$

Quindi $g'(x) = 0$ per

$$x = 2 \pm \sqrt{3},$$

mentre $g'(x) > 0$ per $x \in (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ e $g'(x)$ altrimenti. Ne deduciamo che $g(x)$ è crescente per $2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$ e decrescente per $x < 2-\sqrt{3}$ e per $x > 2+\sqrt{3}$.

Per studiare la concavità consideriamo la derivata seconda $g''(x)$: il numero di punti di flesso di $g(x)$ sarà uguale al numero di zeri della funzione

$$h(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 2,$$

che quindi adesso studiamo.

Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \pm\infty,$$

e

$$h'(x) = 3x^2 - 12x + 3 = 0$$

per

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 9}}{3} = 2 \pm \sqrt{3},$$

così che $x = 2 - \sqrt{3}$ è un punto di massimo e $x = 2 + \sqrt{3}$ è un punto di minimo. Risulta

$$h(2 - \sqrt{3}) = 6\left(\sqrt{3} - 2\right) < 0, \qquad h((2 + \sqrt{3}) = -6\left(\sqrt{3} + 2\right) < 0,$$

quindi il grafico della funzione $h(x)$ è come rappresentato in Figura 4.

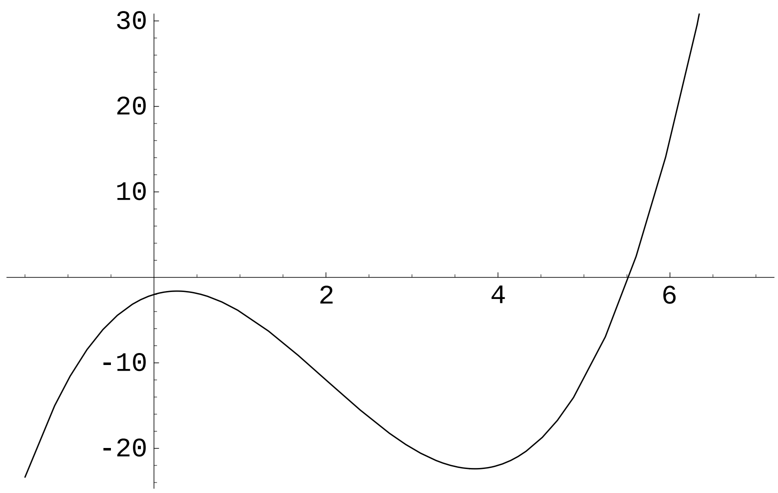

Figura 4. Grafico della funzione $h(x)$ dell'esercizio 8.

In particolare $h(x)$ ha un solo zero in $x_0 > 2 + \sqrt{3}$, e quindi $g(x)$ ha un solo flesso (per $x = x_0 > 2 + \sqrt{3}$). Quindi la funzione $g(x)$ sarà concava per $x \in (-\infty, -1)$, convessa per $x \in (-1, 1)$, concava per $x \in (1, x_0)$ e convessa per $x \in (x_0, +\infty)$. Il suo grafico è rappresentato quindi in Figura 5.

Poiché $f(x) = |g(x)|$, il grafico di $f(x)$ è come rappresentato in Figura 6.

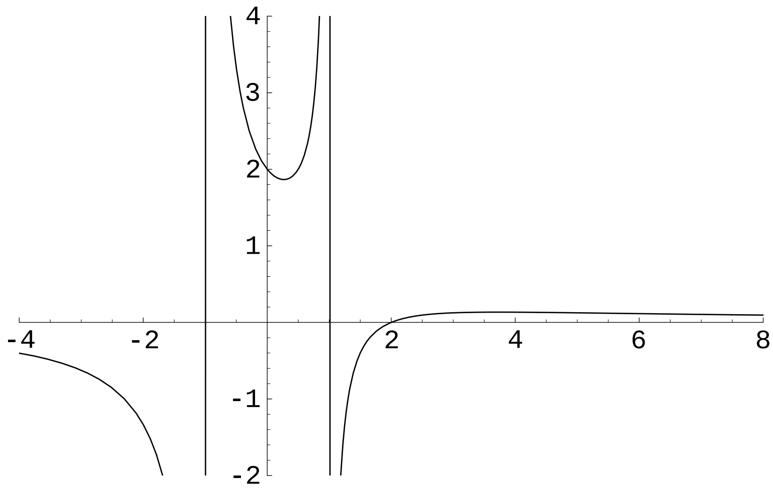

Figura 5. Grafico della funzione $g(x)$ dell'esercizio 8.

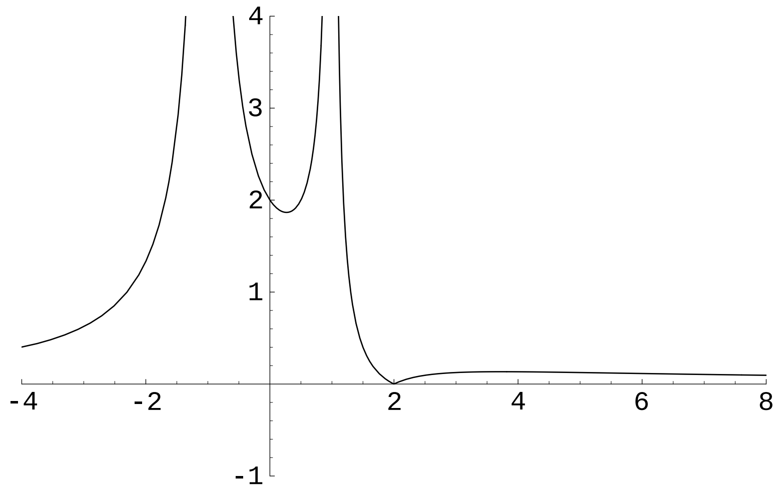

Figura 6. Grafico della funzione $f(x)$ dell'esercizio 8.