AM5: Esercizi e problemi 14.12.01

Misure assolutamente continue, singolari

Esercizio 1

Siano μ, ν, λ misure finite su X. Provare che
(i) se μ é $\nu-$regolare , ν è assolutamente continua rispetto a μ se e solo se
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \mu(E) \leq \delta \Rightarrow \nu(E) \leq \epsilon$
(ii) ν assolutamente continua e singolare rispetto a $\mu \Rightarrow \nu = 0$
(iii) ν, λ singolari rispetto a $\mu \Rightarrow \nu + \lambda$ è singolare rispetto a μ.
(iiii) se $\nu = \nu_{ac}^i + \nu_s^i, \nu_{ac}^i$ assolutamente continue e ν_s^i singolari rispetto a μ, allora $\nu_{ac}^1 = \nu_{ac}^2, \nu_s^1 = \nu_s^2$.

Esercizio 2

Sia μ_f la misura di Lebesgue-Stieltjies associata ad f (f continua e non decrescente). Provare che μ_f è assolutamente continua solo e solo se f è assolutamente continua. Dedurre che f trasforma insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla se e solo se f è assolutamente continua.

Spazi di Hilbert

H denota uno spazio di Hilbert, con prodotto scalare $< .,. >$.

Esercizio 1

Provare che
(i) $< x, y >= 0 \Rightarrow ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$
(ii) $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2), \forall x, y \in H$
(iii) $||x - a||^2 + ||x - b||^2 = 2(||\frac{a-b}{2}||^2 + ||x - \frac{a+b}{2}||^2, \forall a, b, x \in H$

Esercizio 2

Dato $A \subset H$, provare che $\{x \in H :< x, a >= 0, \forall a \in A\}$ è un sottospazio di H lineare e chiuso.

Esercizio 3

Sia V la varietà lineare in H generata da n vettori $h_1, \ldots, h_n$. Provare che V è un insieme chiuso.

Esercizio 4

(i) Siano $e_1, \ldots, e_n$ vettori ortonormali in H, cioè $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$. Detta P la proiezione ortogonale sulla varietà lineare generata dagli e_i, provare che

$$Px = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i, \forall x \in H$$

.

(ii) Dedurre da (i) che, se $\{e_j : j \in \mathbf{N}\}$ è un sistema ortonormale, cioé $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$, allora $\sum_{j=1}^{\infty} | < x, e_j > |^2 \leq ||x||^2, \forall x \in H$.

(iii) dedurre che , per ogni $x \in H$, $< x, e_j > \to 0$ al tendere di j all'infinito

(iiii) dedurre che, per ogni $x \in H$, esiste $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$

(v) Provare che $x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i, \forall x \in H$ se e solo se la varietà lineare generata dagli $e_j, j \in \mathbf{N}$ è densa in H

Esercizio 5

(i) Provare che $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt, n \in N$ sono sistemi ortonormali in $L^2([0, \pi])$.

(ii) Dedurre che $\int_0^\pi \sin ktf(t) \to_{k \to +\infty} 0, \forall f \in L^2([0, \pi]$

(ii) Dedurre che $\int_A e^{inx} dx \to 0, \forall A \subset [0, \pi]$ misurabile. Dedurre che , se $n_k < n_{k+1}$, l'insieme $\{x \in [0, \pi] : \sin(n_k x)$ converge $\}$ è di misura nulla.

Spazi L^p

Esercizio 1

Sia $l : L^p \to \mathbf{R}$ lineare. Sia
$l^+(f) := \sup\{l(\phi) : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ misurabile }\}, \forall f \in L^p, f \geq 0.$
Provare che $l^+(f) := l^+(f^+) - l^+(f^-), \forall f$ misurabile, è lineare.

Esercizio 2

Provare che $f \in L^p(\mathbf{R}^n), \int_{\mathbf{R}^n} f\phi = 0, \forall \phi \in C_0(\mathbf{R}^n) \Rightarrow f = 0$

Esercizio 3

Siano $p_i > 1, \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_l} = \frac{1}{p} \leq 1$. Siano $f_1, \ldots, f_l$ misurabili. Provare che
$(\int |f_1 \ldots f_l|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\int |f_1|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} \ldots (\int |f_l|^{p_l})^{\frac{1}{p_l}}$

Esercizio 4

Siano $1 \leq p < q, r \in [p, q], \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p}, \theta \in [0, 1]$. Provare che per ogni f misurabile si ha

$$(\int |f|^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\int |f|^p)^{\frac{\theta}{p}} (\int |f|^q)^{\frac{1-\theta}{q}}$$

Esercizio 5

Data f Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^n$, $h \in \mathbf{R}^n$, sia $f_h(x) = f(x-h)$. Provare che
(i) f_h è misurabile
(ii) $f \in L^p \Rightarrow f_h \in L^p$ e $||f||_p = ||f_h||_p$
(iii) $h_j \to 0 \Rightarrow ||f_{h_j} - f|| \to 0$

Esercizio 6

Data f Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^n$, $t > 0$, sia $f_t(x) = f(tx)$. Provare che
(i) f_t è misurabile
(ii) $f \in L^p \Rightarrow f_t \in L^p$ e $||f_t||_p = t^{-\frac{n}{p}}||f||_p$

Esercizio 7

Siano $f_n \in L^p(X)$ tali che $\sup_n \int_X |f_n|^p < +\infty$. Provare che $\liminf |f_n| \in L^p$, mentre può accadere che $\int \limsup |f_n| = +\infty$.

Esercizio 8

Sia $\mu(X) < +\infty$. Siano $1 \leq s < t$. Provare che $f \in L^t \Rightarrow f \in L^s$. Provare che l'inclusione $L^t \subset L^s$ è stretta. Provare che l'inclusione $L^t \subset L^s$ è falsa se $\mu(X) = +\infty$.

Esercizio 9

Sia $\mu(X) < +\infty$. Data f misurabile, tale che $\exists c > 0 : |f(x)| \leq c$ per quasi tutti gli x. Posto $||f||_\infty := \inf\{c \geq 0 : |f(x)| \leq c$ per quasi ogni $x\}$, provare che $||f||_p \to_{p \to +\infty} ||f||_\infty$.

Esercizio 10

Sia $f_n \in L^p(\mathbf{R}^n)$. Provare che se
$f_n \to f$ quasi ovunque e $\int |f_n|^p \to \int |f|^p$, allora f_n converge ad f in L^p.

Esercizio 11

Sia $f(x) = \sqrt{\frac{1}{|x|(1+\log^2|x|)}}, x \in \mathbf{R}$. Provare che
(i) $f \in L^p$ se e solo se $p = 2$
(ii) $f \star \chi_{[-1,1]} \in L^p$ se e solo se $p \geq 2$.

Misure assolutamente continue, singolari: suggerimenti

1. Per contraddizione: provare che esistono $\epsilon_0 > 0$, E_j ν-misurabili, con $\mu(E_n) \leq \frac{1}{2^n}$, e considerare $\cap_n \cup_{j\geq n} E_j$...

2. Se μ_f è assolutamente continua, usare la rappresentazione di f mediante μ_f e Radon-Nikodym.., se f è assolutamente continua, argomentare direttamente. Poi, osservare che dire che f trasforma insiemi di misura (di Lebesgue) nulla in insiemi di misura (di Lebesgue) nulla, equivale a dire che μ_f è assolutamente continua..

Spazi di Hilbert: suggerimenti

5. Posto $A := \{x \in [0,\pi] : \exists \lim_k \sin n_k x\} = \{x \in [0,\pi] : \exists \lim_k \cos n_k x\}$ e $\phi(x) := \lim_k \sin n_k x \chi_A(x)$, $\psi(x) := \lim_k \cos n_k x \chi_A(x)$, usare (ii) con $f = \phi$ ed il fatto che $\phi^2 + \psi^2 = \chi_A$.

Spazi L^p: suggerimenti

9. $c > ||f||_\infty \Rightarrow (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \leq c\mu(X)^{\frac{1}{p}}$ e $c < ||f||_\infty \Rightarrow \mu(\{|f| \geq c\}) > 0$...

10. Provare che si può assumere $p = 1$, $||f_n|| = ||f|| = 1$. Indicata μ la misura di Lebesgue, provare quindi che

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \mu(A) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \limsup_n \int_A |f_n| \leq 1 - \int_{A^c} |f| \leq \epsilon$$

Analogamente se $A = B_R$ con R abbastanza grande.