Tutorato VI (12/12/2001)
(Serie di Fourier e applicazioni)

Esercizio 1. Cominciamo col capire com'è fatto $\mathcal{C}$. Possiamo descriverlo come $\mathcal{C} = A \cup B$, dove $A \equiv D \times [1,4]$ è il cilindro circolare retto con basi sui piani $z = 1,\ z = 4$ (D è il disco unitario chiuso in $\mathbb{R}^2$) e B è il segmento di paraboloide rotondo $\{(x,y,z) \in R^3 : \quad (x,y) \in D,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

1. Integriamo per "fette" parallele al piano xy; per $z \in [0,1]$ la z-sezione di $\mathcal{C}$ è il disco $\mathcal{C}(z) \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq z\}$ di centro l'origine e raggio $\sqrt{z}$, e quindi di area πz. Per $z \in [1,4]$, invece, $\mathcal{C}(z)$ è costantemente il disco unitario D di R^2, e quindi la sua area è π.

   Quindi:

   $$\mathrm{Vol}(\mathcal{C}) = \int_0^4 \mathrm{Area}(\mathcal{C}(z))\, dz = \frac{7}{2}\pi\ ;$$

2. Essendo $\mathrm{div}F = 1$, il flusso uscente da $\mathcal{C}$ per il teorema della divergenza è uguale al volume di $\mathcal{C}$;

3. Essendo il campo F parallelo al piano xy, il flusso di esso attraverso la porzione di frontiera di $\mathcal{C}$ sul piano $z = 4$ è nulla; per la stessa ragione è nullo il flusso di F attraverso il disco $D \times 1$, base inferiore del cilidro A che costituisce $\mathcal{C}$. Il teorema della divergenza applicato ad A ci dice che il flusso del campo uscente da A è pari a 3π; tenendo conto delle osservazioni appena fatte, si ha che tale flusso, coincide proprio con il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro, che è quello che ci interessa.

   Per concludere dobbiamo calcolare il flusso attraverso la porzione di frontiera sul paraboloide; per fare ciò possiamo procedere in vari modi: o come sopra, o usando la definizione oppure facendo la differenza tra il flusso totale, trovato nel punto precedente, e la somma dei flussi finora trovati; in tutti i casi viene $\frac{\pi}{2}$.

4. L'area di $\partial\mathcal{C} \cap \{z = 4\}$ è ovviamente π; l'area di $\partial\mathcal{C} \cap \{x^2 + y^2 = 1\}$ è ovviamente 6π, essendo l'area laterale di un cilindro circolare retto di raggio di base 1 e altezza 3. Resta da calcolare l'area di $\partial\mathcal{C} \cap \{z = x^2 + y^2\}$; questa è una superficie cartesiana con parametrizzazione $(x,y) \to (x,\ y,\ x^2 + y^2)$, al variare di $(x,y) \in D$; l'elemento d'area è

$\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}dxdy$, pertanto l'area voluta è (useremo le coordinate polari):

$$
\begin{aligned}
\int_D \sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}dxdy &= \int_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \\
&= \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} r\sqrt{1+4r^2}drd\theta = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)\ .
\end{aligned}
$$

L'area della frontiera vale quindi: $7\pi + \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$.

Esercizio 2. Calcolando i coefficienti di fourier, si ha che:

$$
\begin{cases} c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\frac{2|x|}{\pi})dx = 0 \\ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\frac{2|x|}{\pi})e^{-inx}dx = \frac{2}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n)\ . \end{cases}
$$

La funzione f è C^1 a tratti su $\mathbb{R}$, pertanto la sua serie di Fourier converge ad f dappertutto. La convergenza è totale (e quindi uniforme) in quanto la serie $\sum_{n\neq 0}\frac{2}{\pi^2(2n+1)^2} < \infty$.

Quindi:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n\neq 0} c_n e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}e^{inx} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n+1)^2}\cos{(2n+1)x}\ .
\end{aligned}
$$

(Osserviamo che infatti la funzione f è pari, come si deduce dal fatto che nella sua serie di Fourier compaiano soltanto i termini relativi al coseno!)

Calcoliamo ora la somma delle serie in questione:

- Da quanto detto sopra relativamente alla convergenza della serie di Fourier alla funzione f, si ha che:

$$
1 = f(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(2n+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\ ;
$$

-

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}
$$

da cui segue che: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$;

- $$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\frac{2|x|}{\pi})^2 dx = \frac{1}{3}$$

  mentre

  $$\sum_n |c_n|^2 = \sum_{n\geq 0} \frac{32}{\pi^4(2n+1)^4} \ ;$$

  quindi, usando Parseval:

  $$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \ .$$

- $$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \\ &= \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{96} \end{aligned}$$

  da cui segue che: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Esercizio 3. 1. Le due condizioni omogenee $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, ci suggeriscono di cercare una soluzione della forma

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} c_n(t) \sin nx \ .$$

Dobbiamo ricavarci esplicitamente i c_n; vediamo quali sono le condizioni da imporre (detta $f(x) = x$ estesa in maniera dispari su $[-\pi,\pi]$, indichiamo con $\hat{f}_n$ i suoi coefficienti di Fourier rispetto alla base $\{\sin nx\}_n$... li calcoleremo in seguito):

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_n'(t) + n^2 c_n(t) = 0 \qquad \forall\, n \geq 1$$

quindi i $c_n(t)$ sono della forma $c_n(t) = A_n e^{-n^2 t}$ e di conseguenza la nostra soluzione sarà rappresentata da:

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} A_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

per cui la nostra attenzione si sposterà nella determinazione di questi A_n in modo da soddisfare le condizioni iniziali:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n\geq 1} \hat{f}_n \sin nx \quad \Leftrightarrow \quad A_n = \hat{f}_n \ .$$

Quindi la soluzione cercata è data da:

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} \hat{f}_n e^{-n^2 t} \sin nx \ .$$

Per completare il tutto bisogna calcolare gli $\hat{f}_n$:

$$\hat{f}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \ .$$

Sostituendo nell'espressione della soluzione otteniamo:

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} e^{-n^2 t} \sin nx \ .$$

Osserviamo che potevamo procedere in un altro modo (del tutto equivalente a quello fin qui esposto), noto come metodo di separazione delle variabili. Quello che faremo è cercare una soluzione dalla forma particolare in cui le variabili x è t compaiono come argomento di funzioni distinte; richiederemo cioè:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

che andremo a sostituire nelle equazioni che costituiscono il problema, ottenendo:

$$\begin{aligned}
& X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}
\end{aligned}$$

quindi devono essere necessariamente uguali ad una costante $-\mu$ (questo perchè sto richiedendo in ogni punto che queste due funzioni siano uguali : ma dipendono da variabili indipendenti e quindi non possono che essere costanti):

$$\begin{cases} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\mu \\ \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu \ . \end{cases}$$

Cominciamo col risolvere la seconda equazione, con i relativi dati iniziali che si deducono da quelli del problema originale:

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu \\ X(0) = X(\pi) = 0 \ ; \end{cases}$$

Si verifica immediatamente che per $\mu = 0$ oppure $\mu < 0$ l'unica soluzione ammissibile è la soluzione nulla, che però non è compatibile con il problema iniziale. Quindi l'unico caso ammissibile è $\mu > 0$; in tal caso la soluzione è data da:

$$X_\mu(x) = A_\mu \cos\sqrt{\mu}x + B_\mu \sin\sqrt{\mu}x$$

e imponendo i dati iniziali si ottiene:

$$\begin{aligned} &X_\mu(0) = 0 \ \Rightarrow \ A_\mu = 0 \\ &X_\mu(\pi) = 0 \ \Rightarrow \ B_\mu \sin\sqrt{\mu}\pi = 0 \ \Rightarrow \ \sqrt{\mu} = n \ \Rightarrow \ \mu = n^2 \ . \end{aligned}$$

Sostituendo il valore di μ trovato otteniamo che la prima equazione differenziale invece ammette come soluzione:

$$T_n(t) = A_n e^{-n^2 t} \ .$$

Quindi prendo la soluzione u come combinazioni lineari di queste soluzioni $X_n T_n$ al variare di n, ottenendo:

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} C_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

e procedo esattamente come visto con il metodo precedente, giungendo alla stessa soluzione!

2. Si può procedere in vari modi:

   - <u>Primo metodo</u>: Usando il principio di Sovrapposizione lineare [1] , segue immediatamente che il problema dato è equivalente a risol-

[1] Infatti usando la linearità dell'operatore Δ, segue che se $u_1, \dots , u_n$ sono soluzioni di $\Delta u = 0$, allora anche $v = u_1 + \dots u_n$ è una soluzione dello stesso problema; aggiustando opportunamente le condizioni al contorno, si ha quanto segue nell'esercizio.

vere singolarmente i seguenti tre problemi:

$$a)\ \begin{cases} \Delta u_1 = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \\ u_1(x,0) = x^2 & 0 \leq x \leq \pi \\ u_1(x,\pi) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u_1(0,y) = 0 & 0 \leq y \leq \pi \\ u_1(\pi,y) = 0 & 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} \Delta u_2 = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \\ u_2(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u_2(x,\pi) = x^2 & 0 \leq x \leq \pi \\ u_2(0,y) = 0 & 0 \leq y \leq \pi \\ u_2(\pi,y) = 0 & 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} \Delta u_3 = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \\ u_3(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u_3(x,\pi) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u_3(0,y) = 0 & 0 \leq y \leq \pi \\ u_3(\pi,y) = \pi^2 & 0 \leq y \leq \pi. \end{cases}$$

Tali problemi si possono risolvere facilmente (a meno di difficoltà dovute ai conti!) esattamente come abbiamo fatto per il primo problema.

- Secondo metodo: Vogliamo ricondurci al caso di due condizioni di Dirichlet omogenee; cerchiamo una soluzione della forma $u = \pi x - v$; cerchiamo di trascrivere il problema in termini della v anzichè della u (osserviamo che avendo scelto oculatamente il termine πx, si ha una semplificazione del problema!).

  Osservando che $\Delta u = -\Delta v$ e che $v = \pi x - u$ si ha che il problema iniziale diventa:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \\ v(x,0) = x(\pi - x) & 0 \leq x \leq \pi \\ v(x,\pi) = x(\pi - x) & 0 \leq x \leq \pi \\ v(0,y) = 0 & 0 \leq y \leq \pi \\ v(\pi,y) = 0 & 0 \leq y \leq \pi\ . \end{cases}$$

  Le due condizioni omogenee $v(0,y) = v(\pi,y) = 0$, ci suggeriscono di cercare una soluzione della forma

$$v(x,y) = \sum_{n \geq 1} c_n(y) \sin nx\ .$$

Dobbiamo ricavarci esplicitamente i c_n; vediamo quali sono le condizioni da imporre (detta $f(x) = x(\pi - x)$ estesa in maniera dispari su $[-\pi, \pi]$, indichiamo con $\hat{f}_n$ i suoi coefficienti di Fourier rispetto alla base $\{\sin nx\}_n$... li calcoleremo in seguito):

$$\begin{array}{lcll} \Delta v = 0 & \Leftrightarrow & c_n''(y) - n^2 c_n(y) = 0 & \forall\, n \geq 1 \\ v(x,0) = f(x) = \sum_{n\geq 1} \hat{f}_n \sin nx & \Leftrightarrow & c_n(0) = \hat{f}_n & \\ v(x,\pi) = f(x) = \sum_{n\geq 1} \hat{f}_n \sin nx & \Leftrightarrow & c_n(\pi) = \hat{f}_n & \end{array}$$

quindi ci siamo ricondotti a studiare la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} c_n''(y) - n^2 c_n(y) = 0 \qquad \forall\, n \geq 1 \\ c_n(0) = \hat{f}_n \\ c_n(\pi) = \hat{f}_n \end{cases}$$

che ammette come soluzione:

$$c_n(y) = a_n \sinh ny + b_n \cosh ny \ ;$$

sostituendo le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} & b_n = \hat{f}_n \\ & a_n \sinh n\pi + b_n \cosh n\pi = \hat{f}_n \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} & b_n = \hat{f}_n \\ & a_n = \hat{f}_n \frac{1 - \cosh n\pi}{\sinh n\pi} \ . \end{aligned}$$

Quindi la soluzione cercata è data da:

$$u(x,y) = \pi x - \sum_{n\geq 1} \hat{f}_n \left(\frac{1 - \cosh n\pi}{\sinh n\pi} \sinh ny + \cosh ny \right) \sin nx$$

Per completare il tutto bisogna calcolare gli $\hat{f}_n$:

$$\hat{f}_n \ = \ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi n^3} (1 - (-1)^n) \ .$$

Quindi i coefficienti sono dati da:

$$\begin{cases} \hat{f}_{2n} = 0 \\ \hat{f}_{2n+1} = \frac{8}{\pi (2n+1)^3} \end{cases}$$

e la soluzione del problema può essere rappresentata nella forma:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \pi x - \sum_{n\geq 0} \frac{8}{\pi(2n+1)^3}\Big(\frac{1-\cosh(2n+1)\pi}{\sinh(2n+1)\pi}\sinh(2n+1)y + \\ &+ \cosh(2n+1)y\Big)\sin(2n+1)x \ . \end{aligned}$$