1 Un'estensione dell'integrale di Riemann

Lemma 1.1 *Siano B_j, $j \geq 1$, insiemi misurabili secondo Peano–Jordan tali che*

$$B_{j+1} \subset B_j \tag{1}$$

e tali che $\cap_j B_j$ sia un insieme di misura nulla. Allora

$$\lim_{j \to \infty} \operatorname{mis} B_j = 0 \ . \tag{2}$$

Dimostrazione Sia R_0 un rettangolo compatto tale che $\mathring{R}_0 \supset \overline{B_1}$. Chiamiamo $Q \equiv \cap_j B_j$ e fissiamo un numero arbitrario $\varepsilon > 0$. Per ogni $j \geq 1$, sia $\{K_i^{(j)}\}$ un ricoprimento di cubi aperti di ∂B_j tale che

$$\sum_{i \geq 1} \operatorname{mis} K_i^{(j)} \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \ ;$$

sia, inoltre, $\{K_i^{(0)}\}$ un ricoprimento di cubi aperti di Q tale che

$$\sum_{i \geq 1} \operatorname{mis} K_i^{(0)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Si osservi che

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{mis} K_i^{(j)} \leq \varepsilon \ . \tag{3}$$

Siano

$$\mathcal{R}_1 \equiv \{K_i^{(j)} \ , j \geq 0, \ i \geq 1\} \ , \qquad A \equiv \bigcup_{j \geq 0, i \geq 1} K_i^{(j)} \ .$$

A è un aperto e $R_0 \backslash A$ un compatto. Dalle definizioni date segue che, per ogni $x \in R_0 \backslash A$, esistono un cubo aperto $K(x)$ ed un intero $j(x)$ tale che $K(x) \cap B_{j(x)} = \emptyset$. Sia $\mathcal{R}_2 \equiv \{K(x) : \ x \in R_0 \backslash A\}$. I cubi in $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ formano un ricoprimento aperto di R_0 e, quindi, esiste un numero finito di cubi $K_1, ..., K_N$ in $\mathcal{R}_1$ e cubi $K(x_1), ..., K(x_M)$ in $\mathcal{R}_2$ tali che

$$R_0 \subset \bigcup_{i=1}^{N} K_i \ \cup \ \bigcup_{i=1}^{M} K(x_i) \ ;$$

e da (3) segue che

$$\sum_{i=1}^{N} \operatorname{mis} K_i \leq \varepsilon \ . \tag{4}$$

Sia $j_0 \equiv \max_{1 \leq i \leq M} j(x_i)$. Allora $B_{j_0} \cap K(x_i) = \emptyset$ per ogni $1 \leq i \leq M$ e dunque $B_{j_0} \subset \bigcup_{i=1}^{N} K_i$ e dunque, grazie a (4),

$$\operatorname{mis} B_{j_0} \leq \operatorname{mis} \bigcup_{i=1}^{N} K_i \leq \sum_{i=1}^{N} \operatorname{mis} K_i \leq \varepsilon \ .$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. ∎

Corollario 1.2 *Siano* $A_j \subset A_{j+1}$ *insiemi misurabili secondo Peano–Jordan e tali che* $A \equiv \cup_j A_j$ *sia misurabile secondo Peano–Jordan. Allora*

$$\sup_j \operatorname{mis} A_j = \operatorname{mis} A \ . \tag{5}$$

Dimostrazione Sia $B_j \equiv A \backslash A_j$. Gli insiemi B_j verificano le ipotesi del Lemma 1 e poiché $\operatorname{mis} B_j = \operatorname{mis} A - \operatorname{mis} A_j$, si ha la tesi. ∎

Proposizione 1.3 *Sia* $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Siano, per* $k = 1$ *e* $k = 2$, $\{A_j^{(k)}\}$ *due successioni di sottoinsiemi di* E *misurabili secondo Peano–Jordan, tali che:* $A_j^{(k)} \subset A_{j+1}^{(k)}$ *e* $\bigcup_{j \geq 1} A_j^{(k)} = E$. *Assumiamo che* f *sia Riemann–integrabile su* $A_j^{(k)}$ *per ogni* k *e* j *e*

$$\sup_k \sup_j \int_{A_j^{(k)}} |f(x)| dx < \infty \ . \tag{6}$$

Allora

$$\lim_{j \to \infty} \int_{A_j^{(1)}} f(x) dx = \lim_{j \to \infty} \int_{A_j^{(2)}} f(x) dx \ . \tag{7}$$

Dimostrazione Assumiamo, dapprima, che $f \geq 0$. Sia

$$\alpha_k \equiv \sup_j \int_{A_j^{(k)}} f(x) dx \ .$$

Sia $\hat{A}_j \equiv A_j^{(1)} \cap A_j^{(2)}$; $\{\hat{A}_j\}$ verifica le stesse ipotesi di $\{A_j^{(k)}\}$. Sia

$$\hat{\alpha} \equiv \sup_j \int_{\hat{A}_j} f(x) dx \ .$$

Chiaramente $\hat{\alpha} \leq \alpha_k$ e se si avesse $\alpha_k \leq \hat{\alpha}$ allora $\alpha_1 = \alpha_2$. Fissiamo k, ad esempio $k = 1$, e dimostriamo che $\alpha_1 \leq \hat{\alpha}$. Sia $\varepsilon > 0$. Sia j_0 tale che

$$\int_{A_{j_0}^{(1)}} f(x) dx \geq \alpha_1 - \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Sia $A_j \equiv \hat{A}_j \cap A_{j_0}^{(1)}$; $A_j \subset A_{j+1}$ e $\cup_j A_j = A_{j_0}^{(1)}$. Dal Corollario 2 segue che $\sup \operatorname{mis} A_j = \operatorname{mis} A_{j_0}^{(1)}$. Sia $M \equiv \sup_{A_{j_0}^{(1)}} f$ e sia $j_1 \geq j_0$ tale che

$$\operatorname{mis} A_{j_0}^{(1)} \backslash A_{j_1} \leq \frac{\varepsilon}{2M} \ .$$

Allora

$$\int_{A_{j_0}^{(1)} \backslash A_{j_1}} f \leq \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

e

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\leq \int_{A^{(1)}_{j_0}} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \int_{A_{j_1}} f + \int_{A^{(1)}_{j_0} \setminus A_{j_1}} f \\ &\leq \varepsilon + \int_{A_{j_1}} f \leq \varepsilon + \int_{\hat{A}_{j_1}} f \leq \varepsilon + \hat{\alpha} \ .\end{aligned}$$

Il caso con f generale segue dalle decomposizioni $f = f_+ - f_-$ e $|f| = f_+ + f_-$, dove $f_\pm$ denotano le parti positive e negative di f. ∎

Grazie a tale proposizione, la seguente definizione è ben posta.

Definizione 1.4 *Sia $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e siano $\{A_j\}$ una successione di sottoinsiemi di E misurabili secondo Peano–Jordan, tale che: $A_j \subset A_{j+1}$, f sia Riemann–integrabile su A_j per ogni j e*

$$\sup_j \int_{A_j} |f(x)| dx < \infty \ . \tag{8}$$

Allora esiste il $\lim_{j\to\infty} \int_{A_j} f(x)dx$ e tale numero dipende solo da E e da f. Il limite $\lim_{j\to\infty} \int_{A_j} f(x)dx$ verrà denotato con $\int_E f(x)dx$ e prende il nome di integrale di Riemann generalizzato di f su E. La classe delle funzioni integrabili secondo Riemann in senso generalizzato su E si denota con $\mathcal{R}_1(E)$. La classe delle funzioni per cui valgono le ipotesi qui sopra ma con (8) *sostituita da*

$$\sup_j \int_{A_j} |f(x)|^p dx \equiv \int_E |f(x)|^p dx < \infty \ , \tag{9}$$

per qualche $p > 0$ viene denotata con $\mathcal{R}_p(E)$; (se p è intero si definirà, naturalmente, anche $\int_E f(x)^p dx$).

Osservazione 1.5 (i) Chiaramente se E è misurabile secondo Peano–Jordan e f è Riemann integrabile su E la nuova definizione coincide con la definizione classica di integrale di Riemann (basta prendere $A_j \equiv E$).
(ii) Le disuguaglianze di Schwarz e di Hölder si estendono agli integrali di Riemann generalizzati.
(iii) Se $f \in \mathcal{R}_p(E)$ e se

$$\|f\|_p \equiv \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \ ,$$

gli spazi $\left(\mathcal{R}_p(E), \|\cdot\|_p\right)$ sono spazi normati (ma non completi).
(iv) Se $f \in \mathcal{R}_p(E)$, esiste una successione f_j di funzioni Riemann–integrabili su[1] E tale che $\|f - f_j\|_p \to 0$ per $j \to \infty$. Infatti, basta prendere $f_j \equiv f|_{A_j}$ se $\{A_j\}$ è una successione di insiemi come nella Definizione 4:

$$\int_E |f - f_j|^p = \int_{E \setminus E_j} |f|^p \equiv \lim_{k\to\infty} \int_{E_k \setminus E_j} |f|^p \equiv \lim_{k\to\infty} (\alpha_k - \alpha_j) \ ,$$

[1] In generale E potrebbe essere non misurabile secondo Peano–Jordan (vedi sotto): in tal caso “g Riemann–integrabile su E” va interpretato come “esiste $A \subset E$ misurabile secondo Peano–Jordan tale che $A = \operatorname{supp} f$ e f è Riemann–integrabile su A”.

e dalle definizioni date segue che $(\alpha_k - \alpha_j)$ è arbitrariamente piccolo per $k \geq j \geq j_0$ con j_0 sufficientemente grande.

(v) Nel caso $1 \in \mathcal{R}_1(E)$ porremo, in analogia a quanto già fatto nella teoria classica,

$$\mathrm{mis}(E) \equiv \int_E 1 dx \ ,$$

e chiameremo tale numero la misura di Peano–Jordan generalizzata dell'insieme E.

Esempi (i) Sia $f(x) \equiv 1/|x|^a$ e $E \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < 1\}$. Allora $f \in \mathcal{R}_1$ se e solo se $a < n$.

(ii) Sia $f(x) \equiv 1/|x|^a$ e $E \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$. Allora $f \in \mathcal{R}_1$ se e solo se $a > n$.

(iii) (Un esempio con E non misurabile secondo Peano–Jordan) Sia $\{r_j : j \geq 1\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e $\alpha > 0$. Definiamo

$$I_j^\alpha \equiv \Big(r_j - \frac{\alpha}{2^{j+1}}, r_j + \frac{\alpha}{2^{j+1}}\Big) \cap (0,1) \ , \qquad E^\alpha \equiv \bigcup_{j \geq 1} I_j^a \ .$$

Allora $\overline{E^\alpha} = [0,1]$, (E^α è aperto), E^α è misurabile secondo Peano–Jordan in senso generalizzato e

$$\mathrm{mis}\, E^\alpha = \sup_j \mathrm{mis} \bigcup_{i=1}^j I_j^\alpha \leq \alpha \sup_j \sum_{i=1}^j \frac{1}{2^i} = \alpha \ .$$

Ma, se $\alpha < 1$, E^α non è misurabile secondo Peano–Jordan in senso classico poiché $\partial E^\alpha = [0,1] \backslash E^\alpha$ non è un insieme di misura nulla.