Tutorato VI (12/12/2001)
(Serie di Fourier e applicazioni)

Esercizio 1. Sia $\mathcal{C} \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z \leq 4,\ x^2+y^2 \leq z,\ x^2+y^2 \leq 1\}$:

1. Calcolare il volume di $\mathcal{C}$;
2. Sia $F(x,y,z) = (x,0,0)$; trovare il flusso di F uscente da $\mathcal{C}$;
3. Trovare il flusso di F uscente da ciascuna delle singole porzioni della frontiera di $\mathcal{C}$;
4. Calcolare l'area della frontiera di C.

Esercizio 2. Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione 2π-periodica

$$f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi} \qquad x \in [-\pi,\pi]$$

e studiarne la convergenza in $[-\pi,\pi]$.

Dedurre il valore delle seguenti somme:

(i) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$; (ii) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$; (iii) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$; (iv) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Esercizio 3. Risolvere i seguenti problemi di Dirichlet per equazioni differenziali del secondo ordine alle derivate parziali:

1.
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = x & 0 \leq x \leq \pi\ ; \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \\ u(x,0) = x^2 & 0 \leq x \leq \pi \\ u(x,\pi) = x^2 & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,y) = 0 & 0 \leq y \leq \pi \\ u(\pi,y) = \pi^2 & 0 \leq y \leq \pi. \end{cases}$$