# **Tutorato V** (28/11/2001)

## (1-forme differenziali, Teoremi di Stokes e della divergenza)

**Esercizio 1.** Dire se le seguenti 1-forme differenziali sono chiuse o esatte nel loro dominio di definizione; qualora siano esatte, trovarne una primitiva:

1. $\omega(x,y,z) = x^3\,dx + y^2\,dy + z\,dz$ ;
2. $\omega(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy$ ;
3. $\omega(x,y,z) = \frac{1}{1+y^2}\,dx - \frac{2xy}{(1+y^2)^2}\,dy$ ;
4. $\omega(x,y,z) = \frac{Ax+By}{x^2+y^2}\,dx + \frac{Cx+Dy}{x^2+y^2}\,dy$ al variare di $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 2.** Calcolare l'integrale curvilineo della 1-forma differenziale

$$\omega(x,y) = x^2\,dx + xy^2\,dy$$

lungo la frontiera $\varphi$ del quadrato $[0,1]\times[0,1]$, percorso in senso antiorario.

**Esercizio 3.** Sia $\mathcal{T} \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ |x| + |y| + |z| \le 1\}$.

1. Calcolare $\int_{\mathcal{T}} |z|^\gamma\,dx\,dy\,dz$ per i $\gamma \in \mathbb{R}$ per cui esiste finito;
2. Calcolare $\int_{\mathcal{T}} \left(|x|^\alpha + |y|^\beta + |z|^\gamma\right)\,dx\,dy\,dz$ per gli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ $\in \mathbb{R}$ per cui tale integrale esiste;
3. Calcolare il flusso uscente da $\mathcal{T}$ del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$;
4. Calcolare il flusso di $F$ attraverso la porzione di $\mathcal{T}$ contenuta nel primo ottante.

**Esercizio 4.** Calcolare $\int_{+\partial S} \omega$ direttamente e per mezzo del teorema di Stokes, dove:

- $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2+z^2}$ ;
- $S$ è la superficie laterale del cilindro $\{x^2 + y^2 \le 1, \ 0 \le z \le 1\}$ , con l'orientazione della normale esterna.