Tutorato IV (14/11/2001)
(Integrazione su varietá di $\mathbb{R}^n$)

Esercizio 1. Sia Γ la curva in $\mathbb{R}^3$ data dall'intersezione delle superfici $\{y = x^2\}$ e $\{z = x^3\}$ e limitata dai piani $\{x = 1\}$ e $\{x = 2\}$. Verificare che Γ é un elemento di curva regolare e calcolare $\int_\Gamma f\, ds$ con $f \equiv \frac{\log|z|}{\sqrt{1+4y+9xz}}$.

Esercizio 2. (Superfici di rotazione in $\mathbb{R}^3$)
Sia $\Gamma \equiv \{(u(t), v(t)) : \ t \in (a, b)\}$ un elemento di curva regolare (eventualmente chiusa) in $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ e α un numero in $(0, 2\pi]$. Si dimostri che:

$$\mathcal{S} \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = u(t)\cos\theta, \ y = u(t)\sin\theta, \ z = v(t) \text{ con } t \in (a, b) \text{ e } \theta \in (0, \alpha)\}$$

é un elemento di superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ e se ne calcoli l'area in termini di un integrale su (a, b).

Esercizio 3. Calcolare l'area superficiale del Toro bidimensionale $\mathbb{T}^2$, ottenuto ruotando una circonferenza di raggio r attorno ad un asse a distanza $R > r$ dal centro della circonferenza.
Si noti che $\mathbb{T}^2$ ammette la parametrizzazione:

$$\mathbb{T}^2 \equiv \{x = (R+r\cos t)\cos\theta, \ y = (R+r\cos t)\sin\theta, \ z = r\sin t \ \text{ con } 0 \le t, \theta \le 2\pi \ \}.$$

Esercizio 4. Verificare il teorema della divergenza nel seguente caso: $f(x, y) = (1 + xy, x)$ ed $\mathcal{A} = \{(x, y) : \ (x - 2)^2 + y^2 < 1, \ y > 0\}$.

Esercizio 5. Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^3$ la cui frontiera $\partial\Omega$ sia una superficie regolare chiusa. Sapendo che il volume di Ω é 1, si calcoli il flusso (esterno) attraverso $\partial\Omega$ di $F(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}^3$).