Prova scritta di AM4 del 21/12/01

1) (i) Si enunci il teorema di Green nel piano.
(ii) Sia $\omega \equiv (x - y^3)dx + (y^3 + x^3)dy$ e sia Γ^+ il bordo del quarto di disco $\{x^2 + y^2 \leq a^2 \ , x \geq 0 \ , y \geq 0\}$ orientato positivamente. Si calcoli $\int_{\Gamma^+} \omega$.

2) Sia $A \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\}$ e sia

$$\omega \equiv \frac{y^2}{x^2\sqrt{x^2 + y^2}}dx - \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2}}dy \ .$$

Dire se ω è esatta e calcolare la primitiva F in A tale che $F(1, 1) = 0$.

3) Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e

$$f(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} |x|^a}{|x|} \ , & \text{se } x \neq 0 \ , \\ 1 \ , & \text{se } x = 0 \ . \end{cases}$$

Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è integrabile (in senso di Riemann generalizzato) su $D = \{x : |x| \leq 1\}$.

4) (i) Calcolare la serie di Fourier dell'estensione dispari e di periodo 1 della funzione

$$f(x) \equiv \begin{cases} x \ , & \text{se } 0 \leq x < 1/2 \ , \\ 0 \ , & \text{se } 1/2 \leq x < 1 \ . \end{cases}$$

(ii) Si trovi la funzione $u(x, t)$ che soddisfa

$$\begin{array}{ll} u_t - u_{xx} = 0 \ , & x \in [0, 1] \ , \ t > 0 \ , \\ u(x, 0) = f(x) \ , & u(0, t) = u(1, t) = 0 \ \forall \ t > 0 \ . \end{array}$$

5) Dimostrare l'uguaglianza di Parseval per la trasformata di Fourier di una funzione $C_0^1(\mathbb{R})$.

6) Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che se se $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ e $\operatorname{supp}(f) \subset \Omega$ allora

$$\int_\Omega \partial_{x_i} f dx = 0 \ , \qquad \forall \ i \ .$$