9.11 Cambiamento di variabili nelle integrazioni

In questo capitolo studieremo come cambiano i volumi sotto l'azione di una trasformazione regolare di $\mathbb{R}^n$. Il risultato principale è dato dal seguente

Teorema 9.1 *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto misurabile e $\phi \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$ tale che ϕ sia iniettiva su A e*

$$\det \frac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0 \ , \qquad \forall\, x \in A \ . \tag{9.1}$$

Allora $B \equiv \phi(A)$ è un aperto misurabile di $\mathbb{R}^n$ e per ogni funzione f integrabile su B si ha

$$\int_B f(y)dy = \int_A f \circ \phi(x) |\det \frac{\partial \phi}{\partial x}(x)| dx \ . \tag{9.2}$$

In particolare, vale

$$\text{mis}(\phi(A)) = \int_A |\det \frac{\partial \phi}{\partial x}(x)| dx \ . \tag{9.3}$$

Nella dimostrazione useremo il seguente

Lemma 9.2 *Sia A un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ ed $F \in C(\overline{A}, \mathbb{R}^m)$, con $F(A)$ aperto in $\mathbb{R}^m$.*
(i) *Allora $\partial(F(A)) \subset F(\partial A)$.*
(ii) *Se F è anche iniettiva allora $F(\partial A) = \partial(F(A))$.*

Dimostrazione (i) Sia $B \equiv F(A)$ e $y \in \partial B$, cioè (essendo B aperto per ipotesi) $\exists\, y_n \in B$ tali che $y_n \to y \notin B$. Siano $x_n \in A$ tali che $F(x_n) = y_n$. Poiché $\overline{A}$ è compatto, esiste una sottosuccesione x_{n_k} convergente in $\overline{A}$, e sia $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Per la continuità di F, $F(x_{n_k}) = y_{n_k} \to F(x)$, cioè $y = F(x)$. Ma allora $x \in \partial A$: se fosse $x \in A$, $y = F(x)$ apparterrebbe a B, contrariamente alla nostra assunzione. Quindi $\partial(F(A)) \subset F(\partial A)$.
(ii) Per ipotesi B è un aperto di $\mathbb{R}^m$ e (essendo F iniettiva) $F^{-1}(B) = A$. Se $x \in \partial A$, poiché A è aperto equivale a dire che $x \notin A$ e che $\exists\, x_n \in A$ tale che $x_n \to x$. Per la continuità di F, $y_n = F(x_n) \to y \equiv F(x)$ e naturalmente $y_n \in B$. Ma allora $y \in \partial B$ cioè (essendo B aperto) $y \notin B$: se fosse $y \in B$, $F^{-1}(y)$ apparterrebbe ad A contrariamente alla nostra assunzione. Dunque $F(\partial A) \subset \partial(F(A))$ che insieme al punto (i) prova l'asserto. ∎

Osservazione 9.3 (i) Per $n = 1$, la (9.2) non è altro che la formula nota del cambio di variabile in integrali semplici: in tal caso ϕ è una funzione scalare di variabile reale $x \in \mathbb{R}$ ed il suo jacobiano è la derivata di ϕ rispetto ad x. Si noti che l'apparire del modulo è dovuto al fatto che se $\phi' < 0$ la funzione ϕ non conserva l'ordine: supponiamo infatti che $A = [a, b]$ e $\phi' < 0$ su (a, b) (cioè ϕ è strettamente decrescente su $[a, b]$), allora $\phi([a, b]) = [\phi(b), \phi(a)]$. Quindi, per la formula nota sul cambio di variabile in integrali semplici (ponendo $y = \phi(x)$), si ha

$$\begin{aligned} \int_{\phi(b)}^{\phi(a)} f(y)dy &= \int_b^a f \circ \phi(x)\phi' dx \\ &= -\int_a^b f \circ \phi(x)\phi' dx = \int_{[a,b]} f \circ \phi(x)|\phi'| dx \ . \end{aligned}$$

(ii) La formula (9.3) si ottiene da (9.2) prendendo $f \equiv 1$.
(iii) Il fatto che $\phi(A)$ sia un insieme aperto è diretta conseguenza del teorema della funzione inversa.

(iv) Per il lemma 9.2, punto (i), essendo $\phi(A)$ un insieme aperto, $\partial\phi(A) \subset \phi(\partial A)$. Inoltre ∂A è un insieme di misura nulla (essendo A misurabile). Quindi poiché ϕ (essendo $C^1(\overline{A})$) è uniformemente lipschitziana su $\overline{A}$, che $\phi(\partial A)$ è un insieme di misura nulla e quindi lo è anche il suo sottoinsieme $\partial(\phi(A))$. Dunque $\phi(A)$ è un insieme misurabile.
(v) Sia $\phi(x) = Tx$ con $T \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ matrice invertibile ed $A = K_1$ il cubo unitario n–dimensionale $K_1 = [0,1]^n$. In tal caso la matrice jacobiana $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ coincide con T stessa e quindi le ipotesi del teorema sono chiaramente soddisfatte. La formula (9.3) diviene, allora,

$$\mathrm{mis}(TK_1) = |\det T| \, \mathrm{mis}(K_1) = |\det T| \ . \tag{9.4}$$

In realtà la parte più significativa del teorema è proprio l'affermazione (9.4): il caso generale, infatti, si ricondurrà a (9.4) approssimando, localmente, $\phi(x)$ con la formula di Taylor al prim'ordine.

Cominciamo dunque con il discutere (9.4). Si ricordi che il determinante, visto come funzione delle colonne, è caratterizzato dalle seguenti tre proprietà: 1) scambiando di posto a due colonne, il valore del determinante cambia segno, 2) il determinante è una funzione lineare della prima colonna[1], 3) il determinante di $(e^{(1)}, ..., e^{(n)})$, dove $\{e^{(i)}\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^n$, vale 1. Tale caratterizzazione significa che se Δ è una funzione a valori reali e definita su n–nuple di vettori in $\mathbb{R}^n$ che verifica

$$\begin{aligned}
&1) \quad \Delta(..., v^{(i)}, ..., v^{(j)}, ...) = -\Delta(..., v^{(j)}, ..., v^{(i)}, ...) \ , \\
&2) \quad \Delta(av^{(1)} + bw^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \\
&\qquad\qquad = a\Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + b\Delta(w^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ , \\
&3) \quad \Delta(e^{(1)}, ..., e^{(n)}) = 1 \ ,
\end{aligned} \tag{9.5}$$

(dove la scrittura simbolica nel punto 1) sta a significare che scambiando la i–esima colonna con la j–esima il valore di Δ cambia segno) allora Δ coincide con il determinante, cioè[2]

$$\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = \det[v^{(1)}, ..., v^{(n)}] = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma v^{(1)}_{\sigma_1} \cdots v^{(n)}_{\sigma_n} \ ,$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le permutazioni[3] σ dell'insieme $\{1, ..., n\}$.

La relazione tra determinanti e volumi si basa sulla seguente definizione: siano $v^{(1)}$,..., $v^{(n)}$, n vettori in $\mathbb{R}^n$ e sia $T \equiv [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$ la matrice che ha come j–esima colonna le n componenti, $v^{(j)}_i$, di $v^{(j)}$.

[1] E dunque, per 1), il determinante è una funzione lineare della j–esima colonna, con j qualunque (esercizio **9.1**).

[2] Esercizio **9.2**.

[3] Una permutazione σ di $\{1, ..., n\}$ è una mappa uno–uno $\sigma : j \in \{1, ..., n\} \to \sigma_j \in \{1, ..., n\}$ e ε_σ è il segno di σ (cioè $(-1)^p$ dove p è il numero di scambi che bisogna fare per ordinare la n–nupla $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ o, più analiticamente, $\varepsilon_\sigma = \prod_{i<j} \mathrm{segno}(\sigma_j - \sigma_i)$).

Definizione 9.4 *Si chiama "parallelepipedo con lati $v^{(1)},...,v^{(n)}$" (o anche "parallelepipedo generato da $v^{(1)},...,v^{(n)}$") l'insieme*

$$\Pi(v^{(1)},...,v^{(n)}) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : \ y = \sum_{j=1}^n x_j v^{(j)} \quad \text{con} \quad 0 \le x_j \le 1 \ , \forall 1 \le j \le n\} \ . \tag{9.6}$$

Se $x \in \mathbb{R}^n$, $Tx = \sum_{j=1}^n x_j v^{(j)}$, dunque da tale definizione segue immediatamente che

$$\Pi(v^{(1)},...,v^{(n)}) = TK_1 \ , \qquad \Big(T \equiv [v^{(1)},...,v^{(n)}] \ , K_1 \equiv [0,1]^n\Big) \ . \tag{9.7}$$

Dimostrazione di (9.4). Nel caso $n = 1$ (9.4) è banale: sia, infatti, $Tx = ax$ con $a \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\text{mis}(TK_1) = \text{mis}([0,|a|]) = |a| = |\det T| \ .$$

Consideriamo ora il caso $n \ge 2$ e definiamo la seguente funzione

$$\Delta_0(T) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } \det T = 0 \ , \\ \text{mis}(TK_1) & \text{se } \det T > 0 \ , \\ -\text{mis}(TK_1) & \text{se } \det T < 0 \ . \end{cases} \tag{9.8}$$

Per dimostrare (9.4) basterà dimostrare che la funzione Δ_0 verifica 1), 2), 3) di (9.5) cosicché si avrà $\Delta_0(T) = \det T$ e prendendo il modulo di tale relazione si otterrà (9.4). Dalla definizione di $\Pi(v^{(1)},...,v^{(n)})$ segue immediatamente che

$$\Pi(...,v^{(i)},...,v^{(j)},...) = \Pi(...,v^{(j)},...,v^{(i)},...) \tag{9.9}$$

e da (9.7) e da (9.8) segue immediatamente che, scambiando due vettori di posto, Δ_0 cambia segno: la proprietà 1) è verificata. E' anche chiaro che

$$\Pi(e^{(1)},...,e^{(n)}) = K_1 \tag{9.10}$$

e dunque $\Delta_0(e^{(1)},...,e^{(n)}) = 1$ e cioè vale la proprietà 3). Più delicata è la verifica della linearità. Cominciamo con l'osservare che se p è un intero positivo

$$\begin{aligned} \Pi(pv^{(1)},v^{(2)},...,v^{(n)}) \quad &\equiv \{x_1 p v^{(1)} + \sum_{j=2}^n x_j v^{(j)} : \ 0 \le x_1 \le 1 \ , \ 0 \le x_j \le 1\} \\ &\equiv \{x_1 v^{(1)} + \sum_{j=2}^n x_j v^{(j)} : \ 0 \le x_1 \le p \ , \ 0 \le x_j \le 1\} \\ &= \bigcup_{i=1}^p \{x_1 v^{(1)} + \sum_{j=2}^n x_j v^{(j)} : \ (i-1) \le x_1 \le i \ , \ 0 \le x_j \le 1\} \\ &= \bigcup_{i=1}^p \Big((i-1)v^{(1)} + \Pi(v^{(1)},...,v^{(n)})\Big) \ . \end{aligned} \tag{9.11}$$

Poiché l'insieme nell'ultima riga di (9.11) è formato dall'unione di p insiemi di eguale misura (essendo la misura invariante per traslazioni) aventi in comune solo insiemi di misura nulla ("facce" dei parallelepipedi), si ha che la misura di $\Pi(pv^{(1)}, v^{(2)}, ...)$ è p volte la misura di $\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, ...)$; cioè

$$\Delta_0(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) = a\Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \tag{9.12}$$

vale con $a = p$ intero positivo. Allora

$$\Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = \Delta_0(p\ \frac{1}{p}v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = p\Delta_0(\frac{1}{p}v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \tag{9.13}$$

e quindi (dividendo la (9.13) per p, si vede che) (9.12) vale anche per $a = \frac{1}{p}$ con p intero positivo. Combinando questi due fatti si ottiene subito che (9.12) vale per a numero razionale positivo. Dopodiché osservando che, se $0 < \alpha < \beta$

$$\Pi(\alpha v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \subset \Pi(\beta v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \tag{9.14}$$

si ottiene facilmente (9.12) per $a \in (0, \infty)$: basta infatti considerare due successioni monotone di numeri razionali positivi, $a_i < a < a'_i$ che tendano, rispettivamente da sinistra e da destra al numero reale a, ed usare (9.12) per razionali positivi che insieme alla relazione (9.14) implica

$$a_i\Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \leq \Delta_0(av^{(1)}, .., v^{(n)}) \leq a'_i\Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)})$$

e prendendo il limite per $i \to \infty$ si ottiene (9.12) con a numero reale positivo. Per $a = 0$, (9.12) deriva immediatamente dalla definizione, essendo $\det[0, v^{(2)}, .., v^{(n)}] = 0$. Infine si noti che

$$\begin{aligned} v^{(1)} + \Pi(-v^{(1)}, ..., v^{(n)}) &= \{(1 - x_1)v^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} x_j v^{(j)} :\ 0 \leq x_j \leq 1\} \\ &= \Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \end{aligned} \tag{9.15}$$

e dunque, essendo il segno di $\det(-v^{(1)}, ..., v^{(n)})$ opposto a quello di $\det(v^{(1)}, ..., v^{(n)})$, si ottiene (9.12) con $a = -1$. Infine se a è un numero reale negativo, $a = -|a|$, si ottiene

$$\Delta_0(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) = -\Delta_0(|a|v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = a\Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)})\ ,$$

quindi (9.12) è vera per ogni $a \in \mathbb{R}$. Usando la già dimostrata proprietà 1) si ottiene immediatamente che

$$\Delta_0(v^{(1)}, ..., av^{(j)}, ..., v^{(n)}) = a\Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)})\ , \tag{9.16}$$

per qualunque $1 \leq j \leq n$. Resta ora da dimostrare

$$\Delta_0(v + w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta_0(v, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + \Delta_0(w, v^{(2)}, ..., v^{(n)})\ . \tag{9.17}$$

Cominciamo col discutere un caso particolare di (9.17) e cioè $v = v^{(1)}$, $w = v^{(2)}$ (in qual caso il secondo addendo a destra di (9.17) è nullo per definizione di Δ_0):

$$\Delta_0(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta_0(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})\ . \tag{9.18}$$

Se $\det T \equiv \det[v^{(1)}, ..., v^{(n)}] = 0$, la (9.18) è chiaramente vera. Assumiamo dunque che $\det T \neq 0$ e introduciamo i seguenti "prismi"

$$D_1 \equiv \{x \in K_1 : x_2 \leq x_1\} \ , \quad D_2 \equiv \{x \in K_1 : x_2 \geq x_1\} \ , \quad D_3 \equiv e^{(2)} + D_1 \tag{9.19}$$

e si noti che $\text{mis}(D_1 \cap D_2) = 0$, $\text{mis}(D_2 \cap D_3) = 0$ e che

$$\Pi(e^{(1)}, ..., e^{(n)}) = K_1 \ , \quad \Pi(e^{(1)} + e^{(2)}, e^{(2)}, ..., e^{(n)}) = D_2 \cup D_3 \ . \tag{9.20}$$

Inoltre, poiché, se $T = [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$, $Te^{(i)} = v^{(i)}$, si ha

$$\begin{aligned}
&\Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = TK_1 = TD_1 \cup TD_2 \ , \\
&\Pi(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = TD_2 \cup TD_3 = TD_2 \cup (v^{(2)} + TD_1) \ .
\end{aligned}$$

Quindi, poiché $\text{mis}(TD_1 \cap TD_2) = 0$ e $\text{mis}(TD_2 \cap TD_3) = 0$ (essendo $x \to Tx$ derivabile) e poiché la misura è invariante per traslazioni, si ottiene

$$\begin{aligned}
\text{mis}\,(\Pi(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) \ &= \text{mis}(TD_2) + \text{mis}(TD_3) \\
&= \text{mis}(TD_2) + \text{mis}(TD_1) \\
&= \text{mis}(TD_1 \cup TD_2) \\
&= \text{mis}\,(\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ ,
\end{aligned}$$

il che dimostra (9.18). Combinando (9.18) con la proprietà 1) si ottiene

$$\Delta_0(v^{(1)} + v^{(j)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta_0(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \tag{9.21}$$

per ogni $2 \leq j \leq n$. Sia ora a un numero diverso da 0. Allora da (9.16) (con $j = 2$) e da (9.18), si ottiene

$$\begin{aligned}
&\text{mis}\,(\Pi(v^{(1)} + av^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) = \frac{1}{a}\,\text{mis}\,(\Pi(v^{(1)} + av^{(2)}, av^{(2)}, ..., v^{(n)})) \\
&= \frac{1}{a}\,\text{mis}\,(\Pi(v^{(1)}, av^{(2)}, ..., v^{(n)})) \\
&= \text{mis}\,(\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) \ .
\end{aligned} \tag{9.22}$$

Naturalmente per $a = 0$, l'uguaglianza tra il primo e l'ultimo membro di (9.22) è banalmente vera. Usando ancora la proprietà 1), otteniamo, per ogni $2 \leq j \leq n$, e per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_0(v^{(1)} + av^{(j)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta_0(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ . \tag{9.23}$$

Torniamo ora a (9.17). Naturalmente se $v^{(2)}, ..., v^{(n)}$ sono linearmente dipendenti (9.17) è banalmente vera, essendo entrambi i membri a sinistra e destra dell'uguaglianza nulli. Assumiamo dunque $v^{(2)}, ..., v^{(n)}$ linearmente indipendenti. Per lo stesso motivo, (9.17) vale se v e w sono entrambi linearmente dipendenti con $v^{(2)}, ..., v^{(n)}$. Assumiamo quindi che o v o w sia linearmente indipendente con $v^{(2)}, ..., v^{(n)}$. Supponiamo che lo sia v e chiamiamolo $v^{(1)}$, cosicché $v^{(1)}, ..., v^{(n)}$ forma una base in $\mathbb{R}^n$. Allora esistono n costanti a_i tali che $w = \sum_{i=1}^n a_i v^{(i)}$ ed usando (9.23) ed (9.12),

$$\begin{aligned}
&\mathrm{mis}\,(\Pi(v+w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \mathrm{mis}\,(\Pi(v^{(1)} + \sum_{i=1}^n a_i v^{(i)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) \\
&= \mathrm{mis}\,(\Pi((1+a_1)v^{(1)} + \sum_{i=2}^n a_i v^{(i)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) \\
&= \mathrm{mis}\,(\Pi((1+a_1)v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) \\
&= (1+a_1)\,\mathrm{mis}\,(\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) \\
&= \mathrm{mis}\,(\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) + \mathrm{mis}\,(\Pi(a_1 v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) \\
&= \mathrm{mis}\,(\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) + \mathrm{mis}\,(\Pi(a_1 v^{(1)} + \sum_{i=2}^n a_i v^{(i)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) \\
&= \mathrm{mis}\,(\Pi(v, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) + \mathrm{mis}\,(\Pi(w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}))\ .
\end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione della proprietà 2) e quindi per quanto discusso sopra, vale (9.4). ∎

Osservazione 9.5 Si noti che, infatti, abbiamo dimostrato (9.4) per *ogni matrice* T (cioè non solo per matrici T invertibili).

Sia ora R il rettangolo $[0, b_1] \times \cdots \times [0, b_n]$ con $b_n > 0$. Allora $R = \Lambda K_1$ dove $\Lambda = \mathrm{diag}\,(b_1, ..., b_n)$ e quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{mis}(TR) &= \mathrm{mis}\,(T(\Lambda K_1)) = \mathrm{mis}\,((T\Lambda)K_1) = |\det(T\Lambda)| \\
&= |\det T|\ |\det \Lambda| = |\det T|(b_1 b_2 \cdots b_n) = |\det T|\,\mathrm{mis}(R)\ .
\end{aligned}$$

E poiché, se $a = (a_1, ..., a_n)$,

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = a + [0, b_1 - a_1] \times \cdots \times [0, b_n - a_n]$$

dall'invarianza della misura per traslazione segue che

$$\mathrm{mis}(TR) = |\det T|\,\mathrm{mis}(R) \tag{9.24}$$

per ogni rettangolo in $\mathbb{R}^n$.

Siamo ora pronti per la

Dimostrazione di (9.3). Sia $\Delta_\phi(x) \equiv |\det \frac{\partial \phi}{\partial x}(x)|$. Dividiamo la dimostrazione di (9.3) in tre passi: (1) dimostriamo prima che per ogni cubo chiuso $R \subset A$, vale

$$\mathrm{mis}(\phi(R)) = \int_R |\Delta_\phi(x)| dx\ ; \tag{9.25}$$

(2) vediamo poi che (9.25) vale anche se R è un qualunque rettangolo chiuso contenuto in A e, (3), dimostriamo (9.3).

(1) Sia dunque R un cubo chiuso contenuto in A. Possiamo scrivere per ogni $x_0 \in R$ ed ogni h tale che $x_0 + h \in R$

$$\phi(x_0 + h) = \phi(x_0) + \frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0)h + \theta(h, x_0) \tag{9.26}$$

con

$$\theta(h, x_0) \equiv \Big[\int_0^1 \Big(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0 + th) - \frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0)\Big)dt\Big]h \tag{9.27}$$

(si noti che R è un insieme convesso e quindi il segmento $\{x_0+th : t \in [0,1]\}$ è interamente contenuto in R). Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ tale che

$$|\Delta_\phi(x) - \Delta_\phi(y)| \le \varepsilon \ , \quad \|\frac{\partial\phi}{\partial x}(x) - \frac{\partial\phi}{\partial x}(y)\| \le \varepsilon \tag{9.28}$$

per ogni $x, y \in R$ tali che $|x - y|_\infty \le \delta$. Da (9.28) e (9.27) segue che, per ogni $x \in R$, $x + h \in R$ con $|h|_\infty \le \delta$

$$|\theta(h, x)| \le |h|\varepsilon \le \sqrt{n}|h|_\infty\varepsilon. \tag{9.29}$$

Sia P una partizione di R in cubi di lato r con $r \le \delta$. Introduciamo la seguente notazione: indichiamo con $K_\rho(x)$ il cubo chiuso di lato ρ centrato in x ovvero:

$$K_\rho(x) \equiv \{y : \ |y - x|_\infty \le \frac{\rho}{2}\} \ . \tag{9.30}$$

Sia $K \equiv K_r(x_0)$ uno qualunque dei cubi della partizione P. Dimostriamo allora che, se $y_0 = \phi(x_0)$ e $T \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0)$, esiste una costante $c > 0$ tale che

$$y_0 + TK_{r(1-c\varepsilon)}(x_0) \subset \phi(K) \subset y_0 + TK_{r(1+c\varepsilon)}(x_0) \ , \tag{9.31}$$

o, equivalentemente (vista l'invertibilità di T),

$$T^{-1}y_0 + K_{r(1-c\varepsilon)}(x_0) \subset T^{-1}\phi(K) \subset T^{-1}y_0 + K_{r(1+c\varepsilon)}(x_0) \ . \tag{9.32}$$

Infatti, poiché la mappa $x \to T^{-1}\phi(x)$, su $R = \overline{R} \subset A$, è continua, invertibile ed aperta[4], per il lemma 9.2, punto (ii), si ha che

$$\partial\Big(T^{-1}\phi(K)\Big) = T^{-1}\phi(\partial K) \ , \tag{9.33}$$

e quindi, se $x \in \partial K$ ovvero se $x = x_0 + h$ con $|h|_\infty = \frac{r}{2}$, usando (9.26) (moltiplicata per T^{-1}), si ottiene

$$\begin{aligned} |T^{-1}\phi(x) - T^{-1}y_0|_\infty &= |h + T^{-1}\theta|_\infty \\ &\ge |h|_\infty - |T^{-1}\theta|_\infty = \frac{r}{2} - |T^{-1}\theta|_\infty \\ &\ge \frac{r}{2}(1 - \|T^{-1}\|\sqrt{n}\varepsilon) \end{aligned} \tag{9.34}$$

[4]Si ricorda che una funzione F si dice "aperta" se l'immagine di ogni insieme aperto è un aperto ovvero se $F(A)$ è un insieme aperto, per ogni insieme aperto A.

dove, nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato (9.29). Se scegliamo c tale che

$$c \geq \sqrt{n}\ \sup_A \|(\frac{\partial\phi}{\partial x})^{-1}\| \tag{9.35}$$

otteniamo che un punto sulla frontiera di $T^{-1}\phi(K)$ ha distanza (in norma $|\cdot|_\infty$) *almeno* $\frac{r}{2}(1-c\varepsilon)$ da $T^{-1}y_0$ e quindi

$$T^{-1}y_0 + K_{r(1-c\varepsilon)}(x_0) \subset T^{-1}\phi(K)\ .$$

Analogamente, se x è un punto di K, e quindi $x = x_0 + h$ con $|h|_\infty \leq \frac{r}{2}$,

$$\begin{aligned} |T^{-1}\phi(x) - T^{-1}y_0|_\infty &= |h + T^{-1}\theta|_\infty \\ &\leq |h|_\infty(1+c\varepsilon) \leq \frac{r}{2}(1+c\varepsilon)\ , \end{aligned} \tag{9.36}$$

ovvero vale anche la seconda inclusione di (9.32). Ora, usando (9.28), (9.32), denotando con c_i costanti opportune (che dipendono solo da ϕ e da R: vedi dopo (9.37) per una possibile scelta) e con x_K il centro del cubo $K \in \mathcal{R}(P)$ si ottiene[5]

$$\begin{aligned} \textstyle\int_R \Delta_\phi(x)dx &\leq \sum_{K\in\mathcal{R}(P)} \mathrm{mis}(K) \sup_K \Delta_\phi \\ &\leq \sum_{K\in\mathcal{R}(P)} \mathrm{mis}(K)\Delta_\phi(x_K) + \varepsilon c_1 \\ &= \sum_{K\in\mathcal{R}(P)} \mathrm{mis}(TK) + \varepsilon c_1 \\ &\leq \sum_{K\in\mathcal{R}(P)} \mathrm{mis}\,(TK_{r(1-c\varepsilon)}(x_K)) + \varepsilon c_2 \\ &\leq \sum_{K\in\mathcal{R}(P)} \mathrm{mis}\,(\phi(K)) + \varepsilon c_2 \\ &= \mathrm{mis}\,(\bigcup_{K\in\mathcal{R}(P)} \phi(K)) + \varepsilon c_2 \\ &= \mathrm{mis}\,(\phi(R)) + \varepsilon c_2\ . \end{aligned} \tag{9.37}$$

Le costanti c_i possono essere scelte come segue[6]: $c_1 = \mathrm{mis}(R)$, e se α è tale che

$$\delta^n \leq (\delta(1-c\varepsilon))^n(1+\alpha\varepsilon) \quad\iff\quad \frac{1}{(1-c\varepsilon)^n} \leq (1+\alpha\varepsilon)\ , \tag{9.38}$$

si può fissare $c_2 = c_1 + \mathrm{mis}(A)\alpha\sup_R \Delta_\phi$. Data l'arbitrarietà di ε si ha

$$\int_R \Delta_\phi(x)dx \leq \mathrm{mis}(\phi(R))\ . \tag{9.39}$$

[5]Si noti che nelle relazioni che seguono T dipende dal punto x_K (essendo lo jacobiano di ϕ calcolato in tale punto).

[6]Esercizio **9.3**.

La diseguaglianza opposta si ottiene con metodi del tutto analoghi e viene lasciata al lettore (esercizio **9.4**). Questo completa la dimostrazione di (9.25).

(2) Sia ora $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ un rettangolo chiuso contenuto in A; sia b la lunghezza del suo lato più corto e $\bar{b}$ quella del lato più lungo. Fissato $N > 1$, sia $\delta = (b/N)$ e sia P la partizione tale che $\xi_j^{(i)} - \xi_{j-1}^{(i)} = \delta$ per ogni $j \leq N_i - 1$. E' allora chiaro che i rettangoli di $\mathcal{R}(P)$ sono tutti dei cubi di lato δ tranne al più i rettangoli che hanno uno dei vertici con coordinata j-esima uguale a b_j; ma la somma delle misure di tali rettangoli (ovvero gli elementi di $\mathcal{R}(P)$ che non sono dei cubi di lato δ) non eccede $n\delta\bar{b}^{n-1}$ e tale quantità, aumentando N può essere resa piccola a piacere. Usando questo tipo di partizioni si verifica immediatamente[7] che da (1) segue (2) ovvero (9.25) per rettangoli arbitrari contenuti in $\overline{A}$.

(3) Poiché A è misurabile, la sua frontiera è misurabile ed ha misura nulla. Quindi, fissato $\varepsilon > 0$, esistono N rettangoli R_j tali che[8]

$$Q \equiv \bigcup_{j=1}^{N} R_j \supset \partial A \;, \qquad \mathrm{mis}(Q) \leq \varepsilon \;. \tag{9.40}$$

Chiamiamo $B \equiv A \backslash Q$, e si noti che $\mathrm{mis}(A \backslash B) \leq \mathrm{mis}(Q) \leq \varepsilon$. Sia E un rettangolo contenente B e sia P una partizione di E che contenga tutti i vertici di ogni rettangolo K_j. Allora

$$\begin{aligned} B &\equiv \bigcup_{R \in \mathcal{R}_0} R \;, \quad \text{dove} \quad \mathcal{R}_0 \equiv \{R \in \mathcal{R}(P) : R \subset B\} \\ \mathrm{mis}(B) &= \sum_{R \in \mathcal{R}_0} \mathrm{mis}(R) \;. \end{aligned} \tag{9.41}$$

Inoltre, essendo ϕ iniettiva ed avendo i rettangoli in $\mathcal{R}_0$ in comune al più un insieme di misura nulla (le facce comuni), si ha

$$\begin{aligned} \phi(B) &\equiv \bigcup_{R \in \mathcal{R}_0} \phi(R) \;, \\ \mathrm{mis}\,(\phi(B)) &= \sum_{R \in \mathcal{R}_0} \mathrm{mis}\,(\phi(R)) \;. \end{aligned} \tag{9.42}$$

Dalla dimostrazione della Proposizione 9.8 e da (9.40) segue che

$$\mathrm{mis}\,(\phi(Q \cap A)) \leq L^n \varepsilon \tag{9.43}$$

dove L è la costante di Lipschitz di ϕ su A, cioè, $L \equiv \sup_A \|\frac{\partial \phi}{\partial x}\|$. Ora, usando il risultato del punto (2), (9.41), (9.42), si ha

$$\int_B \Delta_\phi = \sum_{R \in \mathcal{R}_0} \int_R \Delta_\phi = \sum_{R \in \mathcal{R}_0} \mathrm{mis}\,(\phi(R)) = \mathrm{mis}\,(\phi(B)) \;.$$

[7] Esercizio **9.5**.

[8] Si ricordi che ∂A è un insieme compatto cosicché da ogni ricoprimento se ne può estrarre uno finito.

Ed allora (essendo A l'unione disgiunta di B e $A \cap Q$ ed in vista di (9.43))

$$\begin{aligned} |\textstyle\int_A \Delta_\phi - \text{mis}\,(\phi(A))| = \; & |\int_B \Delta_\phi + \int_{A\cap Q} \Delta_\phi - \text{mis}\,(\phi(Q\cap A)) - \text{mis}\,(\phi(B))| \\ & \leq \int_{A\setminus Q} \Delta_\phi + \text{mis}\,(\phi(Q\cap A)) \leq c_3\varepsilon \ , \end{aligned}$$

con $c_3 \equiv \sup_A \Delta_\phi + L^n$. Dall'arbitrarietà di ε segue (9.3). ∎

Dimostrazione di (9.2). Sia P una partizione di $E \supset \phi(A)$. Allora

$$\begin{aligned} \textstyle\int_A f\circ\phi\ \Delta_\phi = \; & \sum_{R\in\mathcal{R}(P)} \int_{\phi^{-1}(R)\cap A} f\circ\phi\ \Delta_\phi \\ & \leq \sum_{R\in\mathcal{R}(P)} \Big(\sup_{\phi^{-1}(R)\cap A} f\circ\phi\Big) \int_{\phi^{-1}(R)\cap A} \Delta_\phi \\ & = \sum_{R\in\mathcal{R}(P)} \Big(\sup_{R\cap\phi(A)} f\Big)\, \text{mis}(R\cap\phi(A)) \\ & = \overline{S}(\bar{f}_{\phi(A)}, P) \end{aligned}$$

e quindi (prendendo l'estremo inferiore su tutte le partizioni P di E)

$$\int_A f\circ\phi\ \Delta_\phi \leq \int_{\phi(A)} f \ .$$

La disuguaglianza inversa si dimostra in maniera del tutto analoga [9]. ∎

ESERCIZI E COMPLEMENTI

subsubsec:cv

9.1 Si domostri che 1) e 2) di (9.5) impicano che Δ è lineare rispetto al j–esimo vettore, con j arbitrario.

Soluzione:

$$\begin{aligned} & \Delta(v^{(1)}, ..., av^{(j)} + bw^{(j)}, ..., v^{(n)}) = \\ & \quad = (-1)^{j-1}\Delta(av^{(j)} + bw^{(j)}, ..., v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \\ & \quad = (-1)^{j-1}(a\Delta(v^{(j)}, ..., v^{(1)}, ..., v^{(n)}) + b\Delta(w^{(j)}, ..., v^{(1)}, ..., v^{(n)})) \\ & \quad = a\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(j)}, ..., v^{(n)}) + b\Delta(v^{(1)}, ..., w^{(j)}, ..., v^{(n)}) \ . \end{aligned}$$

9.2 Si dimostri che se $\Delta = \Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)})$ è una funzione definita su n–nuple di vettori in $\mathbb{R}^n$ che verifica (9.5), allora $\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = \det[v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$.

[9] Esercizio **9.6**.

9.3 (i) Si dimostri che (9.37) vale se le costanti c_1, c_2 sono scelte come indicato nel capoverso dopo (9.37).
(ii) Si trovi un valore di α per cui valga (9.38), assumendo, per semplicità che $\varepsilon \leq c\varepsilon < \frac{1}{2}$.

9.4 Si dimostri, con metodi analoghi a quelli usati nella dimostrazione di (9.39), che

$$\int_R \Delta_\phi(x) dx \geq \text{mis}(\phi(R)) \ .$$

9.5 Si completi (dettagliatamente) il punto (2) della dimostrazione di (9.39).

9.6 Sotto le ipotesi del teorema 9.1, si dimostri che

$$\int_A f \circ \phi \ \Delta_\phi \geq \int_{\phi(A)} f \ .$$

9.7 Sia $F(y)$ la trasformazione inversa della ϕ del teorema 9.1 cioè

$$F : y \in B \equiv \phi(A) \to x = F(y) \in A \ . \tag{9.44}$$

(i) Dimostrare che la coppia B e F verifica le ipotesi del teorema 9.1.
(ii) Dimostrare che se g è una funzione integrabile su $A = F(B)$, allora si ha

$$\int_A g(x) dx = \int_B g \circ F(y) |\det \frac{\partial F}{\partial y}(y)| dy \ . \tag{9.45}$$

9.8 (Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$) Sia $B \equiv (0, R) \times (0, 2\pi)$ e $F : B \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F : (\rho, \theta) \in B \to x = (\rho \cos\theta, \rho \,\text{sen}\,\theta) \ . \tag{9.46}$$

(i) Dimostrare che F e B verificano le ipotesi del teorema 9.1 e calcolare, in particolare, lo jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}$ ed il suo determinante (qui $y \equiv (\rho, \theta)$).
[Risposta: $\frac{\partial F}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$.]
(ii) Si definisca e si discuta la trasformazione inversa ϕ.
(iii) Qual è l'immagine, secondo F, di un rettangolino $[r, r+s] \times [\theta, \theta + \sigma]$?

9.9 (i) Si dimostri che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{9.47}$$

[Suggerimenti: si dimostrino, nell'ordine, le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
&1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \ , \\
&2) \qquad \Big(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx\Big)^2 = \int_{[-R,R]^2} e^{-|x|^2} dx \equiv \beta_R \ , \\
&3) \qquad \int_{B_R} e^{-|x|^2} dx < \beta_R < \int_{B_{\sqrt{2}R}} e^{-|x|^2} dx \ , \\
&4) \qquad \lim_{s\to\infty} \int_{B_s} e^{-|x|^2} dx = \pi \ ,
\end{aligned}$$

qui, come al solito, $|x| \equiv |x|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $B_s \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < s\}$; per dimostrare 4) si usino le coordinate polari dell'esercizio **9.8**.]

(ii) Si dimostri che

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{\frac{n}{2}} \ . \tag{9.48}$$

9.10 Sia $A \equiv B'_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < R\}$ e sia

$$\phi(x) \equiv (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2) \ .$$

(i) Si dimostri che $\Delta_\phi \equiv |\det \frac{\partial \phi}{\partial x}| > 0$ per ogni $x \in A$ ma che

$$\begin{aligned} &\int_A \Delta_\phi dx = 2\pi R^4 \\ &\phi(A) = B'_{R^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{mis}(\phi(A)) = \pi R^4 \ . \end{aligned}$$

[Suggerimento: si noti che se facciamo corrispondere a $x \in \mathbb{R}^2$ il numero complesso $x = x_1 + ix_2$, $(i = \sqrt{-1})$, la trasformazione $x \to \phi(x)$ non è altro che $z \to z^2$.]
(ii) Si spieghi perchè non vale la tesi del teorema 9.1.
(iii) Si trovi un insieme A' su cui, invece, valga la tesi del teorema 9.1.

9.11 (Coordinate polari in $\mathbb{R}^3$) Sia $B \equiv (0, R) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ e $F : B \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$F : (\rho, \theta, \psi) \in B \to x = (\rho \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\psi, \rho \,\mathrm{sen}\,\theta \,\mathrm{sen}\,\psi, \rho \cos\psi) \ . \tag{9.49}$$

(i) Dimostrare che F e B verificano le ipotesi del teorema 9.1 e calcolare, in particolare, lo jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}$ ed il suo determinante (qui $y \equiv (\rho, \theta, \psi)$).
[Risp.: $\frac{\partial F}{\partial(\rho,\theta,\psi)} = \begin{pmatrix} \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\psi & -\rho \,\mathrm{sen}\,\theta \,\mathrm{sen}\,\psi & \rho \cos\theta \cos\psi \\ \mathrm{sen}\,\theta \,\mathrm{sen}\,\psi & \rho \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\psi & \rho \,\mathrm{sen}\,\theta \cos\psi \\ \cos\psi & 0 & -\rho \,\mathrm{sen}\,\psi \end{pmatrix}$, $\det \frac{\partial F}{\partial(\rho,\theta,\psi)} = -\rho^2 \,\mathrm{sen}\,\psi$.]
(ii) Si definisca e si discuta la trasformazione inversa ϕ.

9.12 (Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$) Sia $B \equiv (0, R) \times (0, 2\pi) \times (-h, h)$ e $F : B \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$F : (\rho, \theta, z) \in B \to x = (\rho \cos\theta, \rho \,\mathrm{sen}\,\theta, z) \ . \tag{9.50}$$

(i) Dimostrare che F e B verificano le ipotesi del teorema 9.1 e calcolare, in particolare, lo jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}$ ed il suo determinante (qui $y \equiv (\rho, \theta, z)$).
(ii) Si definisca e si discuta la trasformazione inversa ϕ.