Tutorato III (31/10/2001)

(Esercizi di riepilogo)

Esercizio 1. 1. VERO: Se per assurdo si avesse che $\overset{o}{X} \neq \emptyset$, allora esisterebbe $x_0 \in X$ e quindi potrei trovare $D_r(x_0) \subset X$; da cui:

$$0 = \text{mis}(X) \geq \text{mis}(D_r(x_0)) > 0$$

che è chiaramente una contraddizione.

2. FALSO: Prendiamo come controesempio $X = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$; dalla densità dei razionali segue che $\overset{o}{X} = \emptyset$, ma X non è un insieme di misura nulla (tra l'altro non è Peano Jordan misurabile): infatti se fosse di misura nulla avrei

$$1 = \text{mis}([0,1]) = \text{mis}(X \cup ([0,1] \cap \mathbb{Q})) = \text{mis}(X) + \text{mis}([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$$

che è assurdo!

3. VERO: dalla definizione di insiemi di misura nulla segue che $\forall \varepsilon > 0$ esistono $\{X_n\}_n$, $\{Y_m\}_m \subset \mathbb{R}$ ricoprimenti con rettangoli tali che:

$$\begin{array}{ll} Q_x \subset \cup_n X_n & \sum_n \text{mis} X_n < \varepsilon \\ Q^y \subset \cup_m Y_m & \sum_m \text{mis} Y_m < \varepsilon. \end{array}$$

Consideriamo ora il seguente ricoprimento di $Q_x \times Q^y$ con rettangoli: $\{X_n \times Y_m\}_{n,m}$; si hanno le seguenti proprietà:

$$Q_x \times Q^y \subset \cup_{n,m} X_n \times Y_m \text{ e } \sum_{n,m} \text{mis}(X_n \times Y_m) = \sum_n \sum_m (\text{mis}(X_n) \cdot \text{mis}(Y_m)) =$$

$$\sum_n \text{mis}(X_n) \cdot \sum_m \text{mis}(Y_m) < \varepsilon^2$$

da cui segue che tale insieme ha misura nulla.

4. FALSO: prendiamo ad esempio $Q = \{0\} \times \mathbb{R}$ (cioè l'asse delle y). Se consideriamo $x = 0$ allora si ha $Q_0 = \mathbb{R}$ che non è di misura nulla (non è nemmeno P-J misurabile!).
(Cfr. [C] esercizio E.9.23 e la soluzione proposta in appendice B).

Esercizio 2. Consideriamo il caso della successione convergente e sia $l = \lim_n x_n$.
Ovviamente si tratta di un insieme di misura nulla: infatti ogni insieme numerabile è di misura nulla. Facciamo vedere che è anche P-J misurabile (cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ riusciamo a trovare un ricoprimento FINITO con rettangoli $\{R_n\}_{n=1}^N$ t.c. $\sum_{n=1}^N \text{mis}(R_n) < \varepsilon$). Questo segue semplicemente dalla definizione di limite; infatti $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N > 0$ t.c. $x_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ per ogni $n \geq N$.
Consideriamo quindi il seguente ricoprimento finito:

$$\begin{aligned} &R_k = \{x_k\} && \text{per } k < N \\ &R_N = [l - \varepsilon, l + \varepsilon] \end{aligned}$$

Si vede chiaramente che soddisfa le hp elencate sopra!
Nel caso di una successione non convergente, possiamo ancora dire che si tratta di un insieme di misura nulla (in quanto rimane un insieme numerabile), ma non sarà più vero in generale che è Peano Jordan misurabile. (Considerare ad esempio la successione $\{x_n = n\}_n$ oppure la successione dei razionali in $[0, 1]$).

Esercizio 3. Detto Δ il solido ottenuto dalla rotazione di D intorno all'asse z, possiamo rappresentarlo nel seguente modo come dominio normale usando le coordinate cilindriche:

$$\Delta = \{(\rho, \theta, z) : \ \theta \in (0, 2\pi), \ (\rho, z) \in D\}.$$

Quindi:

$$\text{Vol}(\Delta) = \iiint_\Delta dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_D \rho\, d\rho\, dz = 2\pi \iint_D x\, dx\, dz =$$

Ricordando ora che le coordinate del baricentro di D sono date da $(x_b, z_b) = \frac{1}{\iint_D dx\, dz} \left(\iint_D x\, dx\, dz, \iint_D z\, dx\, dz\right)$ si ha:

$$= 2\pi \frac{\iint_D x\, dx\, dz}{\iint_D dx\, dz} \iint_D dx\, dz = 2\pi x_b \text{mis}(D).$$

Applicando ora il teorema appena dimostrato ai solidi di rotazione sotto riportati (con un'opportuna scelta di D) si ottengono le seguenti espressioni dei volumi:

1. $\frac{4}{3}\pi r^3$;

2. $2\pi^2 a r^2$;

3. $\pi r^2 h$;

4. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$;

5. $\frac{\pi h}{3}(R^2 + rR + r^2)$.

Esercizio 4. Osservare che in coordinate sferiche il dominio è dato da:

$$\Phi^{-1}(D) \equiv \{(\rho, \theta, \varphi) : \ 0 \le \rho \le 1, \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ \rho \cos\varphi \ge \rho \sin\varphi\} =$$

$$= \{(\rho, \theta, \varphi) : \ 0 \le \rho \le 1, \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\}.$$

Calcolando l'integrale in coordinate sferiche (osservando che il modulo del determinante Jacobiano è $\rho^2 \sin\varphi$) si ottiene che è uguale a $\frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$.

Esercizio 5. Osserviamo che il dominio di integrazione, si può scrivere:

$$D \equiv \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 - 2y \le 0, \ 0 \le z \le \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\}$$

Quindi ponendo $A \equiv \{(x, y) : \ x^2 + y^2 - 2y \le 0\}$ (che non è altri che un cerchio nel piano x, y di centro $C = (0, 1, 0)$ e raggio 1) si ha:

$$\iiint_D x\sqrt{|yz|}\, dx\, dy\, dz = \iint_A \left(\int_0^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)} x\sqrt{|y|}\sqrt{z} \right) dx\, dy =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} \iint_A x\sqrt{|y|}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\, dx\, dy.$$

Scrivendo A in coordinate polari (cioè $T^{-1}(A) = \{(\rho, \theta) : 0 \le \rho \le 2\sin\theta, \ 0 \le \theta \le \pi\}$), e calcolando l'integrale ottenuto si ottiene che il risultato è uguale a 0.

Esercizio 6. Basta considerare $D_k = \{(x, y) : \ 0 < x < k, \ x < y < k\}$. Segue facilmente che f è integrabile su D_k per ogni k e che:

$$\int_D x e^{-xy}\, dx\, dy = \lim_{k \to \infty} \int_{D_k} x e^{-xy}\, dx\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$