AM2: Appello C-17 Giugno 2002

Domanda 1

Sia $f \in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$.

(i) Provare che f é integrabile in senso generalizzato in $\mathbf{R}$.

(ii) Provare con un esempio che é in generale falso che

$$f \text{ integrabile in senso generalizzato in } \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$$

Domanda 2

Siano $f_n \in C([0,1]), M_n := \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$. Provare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente in } [0,1].$$

Domanda 3

Siano $f_n \in C_0(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Sia f tale che $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to+\infty} 0$.
(i) Provare che f é continua e $f(x) \to_{|x|\to+\infty} 0$
(ii) É necessariamente vero che $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$?

Domanda 4

(i) Sia $f \in C([-1,1])$. Dati due numeri a, b, si considerino le seguenti successioni di funzioni, definite per ricorrenza:

$$y_1(x) \equiv a, \ \ , z_1(x) \equiv b, \ \ y_{n+1}(x) = a + \int_0^x z_n(t)dt, \quad z_{n+1}(x) = b + \int_0^x f(t)y_n(t)dt$$

Provare che se $0 < \delta$ é abbastanza piccolo, allora $y_n, \ z_n$ sono successioni di Cauchy per la convergenza uniforme su $[-\delta,\delta]$. Posto quindi

$$y(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n(x), \ \ z(x) = \lim_{n\to+\infty} z_n(x), \ \ x \in [-\delta,\delta]$$

provare che $y(x) = a + \int_0^x z(t)dt, \ \forall x \in [-\delta, \delta$ é di classe $C^2(-\delta,\delta)$ ed é soluzione del problema di Cauchy

$$(C) y''(x) = f(x)y(x), \quad x \in (-\delta, \delta) \quad y(0) = a, \;\; y'(0) = b$$

(ii) Provare che se f é analitica in $(-1,1)$ e y e w sono soluzioni analitiche in $(-\delta, \delta)$ dello stesso problema di Cauchy (C), allora $y \equiv w$. Provare, piú in generale, che tale risultato di unicitá é vero anche se f si suppone soltanto continua.

(iii) Provare che se f é analitica in $(-1,1)$ la soluzione del problema di Cauchy in (i) é necessariamente analitica. Provare con un esempio che se f non é analitica, allora la soluzione del problema di Cauchy puó non essere analitica

Esercizio 1

Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2 + \sin n)^n z^n$$

Esercizio 2

Determinare, sotto forma di serie di potenze, la soluzione del problema di Cauchy:

$y''(x) \; - \; xy(x) = 0$

$y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$

Esercizio 3

Provare, usando le formule di Eulero, che

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} z^k = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \cos kx + i \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \sin kx, \quad \forall z = re^{ix}, 0 \leq r < 1$$

Provare quindi, conoscendo la somma della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$, che

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \cos kx = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r\cos x \; + r^2)}, \;\; \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \sin kx = \frac{r \sin x}{1 - 2r\cos x \; + r^2}$$

Suggerimenti

4- (i) Provare che, per δ opportunamente piccolo, risulta
$\sup_{x\in[-\delta,\delta]} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| + \sup_{x\in[-\delta,\delta]} |z_{n+1}(x) - z_n(x)| \leq$
$\leq \frac{1}{2} \sup_{x\in[-\delta,\delta]} |y_{n-1}(x) - y_n(x)| + \sup_{x\in[-\delta,\delta]} |z_{n-1}(x) - z_n(x)|$

4-(ii) Calcolare $y^{(n)}(0)$, $\forall n$ ed usare il principio di identitá per funzioni analitiche.

4-(iii) Determinare i coefficenti di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ in modo tale che sia soddisfatta l'equazione (utilizzare il teorema di Cauchy sulle serie prodotto..). Provare infine che la serie cosi' ottenuta ha raggio di convergenza positivo.