AM2: Appello X-13 Aprile 2002

Domanda 1

Sia $a_n : n \in \mathbf{N}$ una successione limitata di numeri reali. Provare che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{converge} \quad \forall x \in (-1,1).$$

Posto $\qquad f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \ \ |x| < 1, \qquad$ provare che $f \in C^1((-1,1))$.

Domanda 2

Sia $f \in C([-1,1])$. Provare che

esistono $f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tali che $f_n \to f$ uniformemente in $[-1,1]$.

Domanda 3

Sia $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$, $n \in \mathbf{N}$. Provare che

$$\phi(0) = \phi(1) + \phi^{'}(0) + \ldots + \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \phi^{(n+1)}(t)dt$$

Domanda 4

Siano $a_j, \ c_j, \ j = 0, \ldots, n-1$ numeri reali assegnati. Provare che esiste una ed una sola funzione $x \in C^\infty(\mathbf{R})$ che risolve il problema di Cauchy

(1) $\qquad x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}$

(2) $\qquad x^{(j)}(0) = c_j, \quad j = 0, \ldots, n-1.$

Dedurre che esistono n soluzioni $x_j(t), \ t \in \mathbf{R}$ dell'equazione differenziale (1) , tra loro linearmente indipendenti, e che ogni altra soluzione si può scrivere come combinazione lineare delle x_j.

Esercizio 1

Calcolare, effettuando una integrazione per parti:

$$(i)\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{1+x^2}dx$$

$$(ii)\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(nx)}{1+x^2}dx$$

Fissato $t \geq 0$, calcolare

$$(iii)\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{t+x}dx$$

Posto $f_n(t) := \int_0^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{t+x}dx$, $t > 0$, stabilire se f_n converge anche uniformemente.

Esercizio 2

Provare che

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(j+k)!}{j!}\ x^j \quad = \quad \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

Esercizio 3

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$x''' - 8x = e^t$