AM2: 22 Gennaio 2002

1

Siano $f_n \in C([a,b])$, $M_n := \max_{x\in[a,b]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$. Supposto che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$$

provare che f_n converge a una $f \in C([a,b])$

2

(i) Provare che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge per ogni z complesso, e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}$$

(ii) Enunciare e dimostrare le formule di Eulero

3

Sia f analitica in $(-r,r)$. Provare che

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in (-r,r)$$

4

Enunciare e dimostrare la formula della variazione delle costanti per equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficenti costanti

Determinare quindi, facendo uso della formula della variazione delle costanti, i valori di $\lambda \in \mathbf{R}$ per i quali tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x'' + 2x' + x = e^{-\lambda t^2}$$

tendono a zero al tendere di t a $+\infty$.

5

Sia

$$f_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{t}{2}}, \;\; x \in (0,\pi]$$

Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f_n(x)dx \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi |f_n(x)|dx$$

(Suggerimento: effettuare un opportuno cambio di variabile..)

6

Calcolare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{n^n}x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}|1-i^n|^n x^n$$

7

Stabilire se $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{n^4+x^4}, x \in \mathbf{R}$, converge uniformemente/puntualmente in $\mathbf{R}$.

8

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + xy' = e^{x^4}$$