AM2: Lavoro Guidato 25.10.01

Problema 1: Esistenza globale

Sia $f \in C(\mathbf{R})$, Lipschitziana. Supponiamo che esistano costanti positive a, b tali che

$$|f(s)| \leq a + b|s| \quad \forall s$$

Sia $x(t)$ soluzione in $[0, T]$ dell'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

Provare che $\quad |x(t)| \leq |x(0)| \;\; e^{bt} + \frac{a}{b} \;\; (e^{bt} - 1)$.

Concludere che $x(t)$ é prolungabile, come soluzione dell'equazione, per tutti i tempi positivi.

(Suggerimenti:
Provare , integrando l'equazione, che

$$|x(t)| \leq |x(0)| + at + b \int_0^t |x(\tau)| d\tau \;\; := U(t)$$

Provare quindi che $U' - bU \leq a$ e dedurre che $U(t) \leq |x(0)| \;\; e^{bt} + \frac{a}{b} \;\; (e^{bt} - 1)$.

Osservare poi che $\dot{x}$ ha segno costante ed usare la limitazione per $x(t)$ per concludere che x puó essere prolungata oltre T , utilizzando la risolubilitá locale del Problema di Cauchy.)

Problema 2: Diseguaglianza di Gronwall

Sia u funzione continua e non negativa in $\mathbf{R}$. Supponiamo esistano costanti positive a, b, tali che

$$0 \leq u(t) \leq a + b \int_0^t u(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

Provare che $\quad u(t) \leq a \;\; e^{bt} \;\; \forall t \in [0, T]$

(Suggerimento: Posto $U(t) := a + b \int_0^t u(s) ds \geq u(t)$, provare che $(\log U(t))' \leq b$, e quindi integrare.)

Problema 3: Dipendenza continua dalla condizione iniziale

Sia f Lipschitziana, cioé $\exists k > 0 : |f(t) - f(s)| \leq k|t - s| \ \ \forall s, t \in \mathbf{R}$. Provare che, se

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \dot{y}(t) = f(y(t)), \quad t \in \mathbf{R}$$

allora $|x(t) - y(t)| \leq |x(0) - y(0)| \ e^{kt}$

Suggerimento: applicare la diseguaglianza di Gronwall ad $u(t) = |x(t) - y(t)|$.