Cognome e nome___________________________

ESAME DI AM1b - ANALISI MATEMATICA
Prof. M. Girardi
prova scritta del 07/06/2002

ESERCIZIO 1
Trovare i punti di accumulazione del seguente insieme:

$$A = \left\{ \frac{3n - |\sin n|}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

Giustificare le risposte usando la definizione di punto di accumulazione.

Riscriviamo gli elementi di A come $3 - \frac{|\sin n|}{n}$ e dimostriamo che 3 é l'unico punto di accumulazione. L'insieme non contiene punti di accumulaizone in quanto é un insieme discreto.

$$\left| 3 - 3 + \frac{|\sin n|}{n} \right| = \left| \frac{\sin n}{n} \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

quindi 3 é l'unico punto di accumulazione.

ESERCIZIO 2
Studiare la convergenza della serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \sin \frac{1}{n^2} \right)$$

Usiamo il criterio del confronto asintotico, con $a_n = \ln\left(1 + \sin \frac{1}{n^2}\right)$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = n^2 \ln \left(1 + \sin \frac{1}{n^2} \right) = \ln \left(1 + \sin \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} =$$

$$= \ln \left(1 + \sin \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{1}{n^2}} n^2 \sin \frac{1}{n^2}} \quad \to \ (\ln e) = 1$$

Quindi per il criterio del rapporto asintotico la serie di partenza converge in quanto ha lo stesso comportamento di $\sum \frac{1}{n^2}$.

ESERCIZIO 3
Determinare per quali valori del parametro reale a la seguente funzione é continua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x}\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right)\cdot\sin\frac{x}{2} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 \quad \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo verificare che $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, quindi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{a}{x}\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right)\cdot\sin\frac{x}{2} = a\lim_{x\to 0}\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right)\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{x}{2} =$$

$$= a\cdot\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

da cui si deduce che la funzione é continua se $a = 4$.

ESERCIZIO 4

Studiare , per $x \geq 5$, la monotonia della seguente funzione, e dire se ammette massimi o minimi relativi:

$$F(x) = \int_5^x \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right) dt$$

Deriviamo:

$$F'(x) = \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) > 0 \quad \forall x > 5$$

dato che $\frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} < 1$. La funzione é monotona crescente. Inoltre non ammette massimi o minimi relativi perché $F'(x) = 0$ solo in $x = 0$.

ESERCIZIO 5

Dimostrare che, $\forall\ x > 0$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}} \geq 2$$

Considero la funzione $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} - 2$, ne studio la derivata:

$$g'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}} = 0 \iff x = 1$$

1 é un minimo, e $g(1) = 0$, da cui la tesi.