SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI DEL SECONDO ESONERO DI AM1b

ESERCIZIO 1
Calcolare massimo e minimo limite della seguente successione, giustificando le risposte:

$$a_n = \frac{\cos n\pi}{n^2} + \cos(n+2)\pi + \frac{2\cdot(-1)^n}{n}$$

Possiamo riscrivere la successione come $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} + (-1)^n + \frac{2\cdot(-1)^n}{n}$.
Consideriamo poi le sottosuccessioni di indici pari e dispari.

$$a_{2k} = \frac{1}{k^2} + 1 + \frac{2}{k},\ a_{2k-1} = -\frac{1}{k^2} - 1 - \frac{2}{k},$$

quindi

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1.$$

Infine si verifica applicando la definizione che 1 é un maggiorante definitivo e -1 é un minorante definitivo, quindi 1 é il massimo limite, -1 é il minimo limite.

ESERCIZIO 2
Studiare la convergenza della serie seguente al variare di $x \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)$$

Convergenza semplice ed assoluta si equivalgono perché la serie é a termini positivi.
Ricordando che $\ln(1+x) \leq x,\ \forall x > 0$, si ha

$$\frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}}\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{x^{2n+2}}{n}.$$

Per il criterio del confronto la serie di partenza converge se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n}$, applicando il criterio della radice n-sima si ottiene convergenza per $x^2 < 1$, ovvero $x \in (-1,1)$. Per $x = \pm 1$ la serie diverge.

ESERCIZIO 3
Stabilire se la seguente funzione é uniformemente continua

$$f(x) = e^x \ \chi_{[0,4]}(x) + \cos\frac{1}{x} \ \chi_{[5,10)}(x) + \frac{1}{(x-3)^2}\chi_{[11,+\infty)}(x)$$

dove $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a,b] \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Nei punti 0, 4, 5, 10, 11 la funzione ammette una discontinuitá di prima specie (salto). Nei tre intervalli in cui é diversa da zero é u.c., infatti: Se $x \in [0,4]$ $f(x) = e^x$, che essendo continua é uniformemente continua nei compatti, quindi si ha u. continuitá in $[0, 4-\varepsilon]$ per ogni $\varepsilon > 0$.
Se $x \in [5,10)$ $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, che é continua e quindi u.c. in $[5+\varepsilon, 10-\varepsilon]$ per ogni $\varepsilon > 0$.
Infine se $x \in [11,+\infty)$ $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ che é uniformemente continua in $[11+\varepsilon, +\infty)$perché ha derivata limitata.

ESERCIZIO 4
Decomporre un numero reale positivo a nella somma di due numeri reali e positivi in modo che la somma dei quadrati di questi sia minima.

Sia $a = x + y$, quindi $y = a - x$, $x^2 + y^2 = x^2 + (a-x)^2 = f(x)$.
La funzione da minimizzare é $f(x)$.

$$f'(x) = 2x - 2a - 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{a}{2}$$

$$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > \frac{a}{2}.$$

Quindi, poiché $x = \frac{a}{2}$ é un minimo, la somma $x^2 + y^2$ é minima se $x = y = \frac{a}{2}$.

ESERCIZIO 5
Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{x + e^x} dt$$

Suggerimento : dimostrare che si ottiene una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ quindi applicare il Teorema di De L'Hopital.

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{x + e^x} dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x e^{t^2} dt}{x + e^x}.$$

La funzione integranda é positiva, in particolare maggiore di 1, quindi $F(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$ é una funzione positiva e crescente, in particolare

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \geq \lim_{x\to+\infty} \int_1^x 1 dt = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Quindi si ottiene una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e si puó applicare il Teorema di De L'Hopital. Derivando otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x e^{t^2}}{x+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}dt}{1+e^x} = +\infty.$$