ESERCIZI SULLE SUCCESSIONI NUMERICHE-SOLUZIONI

Esercizio 1

(i) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\frac{n^2+1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt{n^2+1}-n^2-1}{n+1}$
si ha un quoziente di due funzioni, il grado maggiore a cui e' elevata n e' 2 quindi dividiamo numeratore e denominatore per n^2 :

$$\frac{(1+\frac{1}{n})\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+1}\to 0$$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left[a^n\left(\frac{1}{a^n}+1\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln a^n+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{a^n}+1\right)$.
Il primo termine é esattamente $\ln a$, mentre il secondo tende a zero, dato che $a\geq 1$, quindi $\ln\left(\frac{1}{a^n}+1\right)<ln2$.

(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}}{n^2+1}\left(\frac{2}{e}\right)^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}$.
Il termine $\left(\frac{2}{e}\right)^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}$ tende a zero perché $2<e$. D'altra parte, studiando separatamente la radice esponente di e :
$\lim_{n\to\infty}\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}=\lim_{n\to\infty}\ln n\sqrt{\frac{(\ln n)^2}{(\ln n)^2}+\frac{\ln n^2}{(\ln n)^2}}=\ln n.$
Quindi
$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}}{n^2+1}\simeq\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\ln n}}{n^2+1}\to 0.$
Quindi il limite iniziale é 0.

(iv) $\lim_{n\to\infty}\frac{10^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}}{n^2+1}$
Questo limite e' molto simile al precedente, c'e' un 10 al posto di 2, ma in realta' il risultato e' molto diverso perche' e' $+\infty$, quello che quindi conta e' il rapporto tra la base dell'esponenziale, 10 oppure 2, e e che invece e' la base del logaritmo naturale a cui tende la radice all'esponente. Si procede come nel

limite precedente per cui il termine

$$\left(\frac{10}{e}\right)^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}} \to \infty$$

mentre l'altro termine tende a zero con lo stesso ordine di $\frac{1}{n}$. Ci troviamo di fronte ad una forma indeterminata. Poiche' la radice $\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}$ ha lo stesso andamento di $\ln n$, come spiegato nell'esercizio precedente, si puo' riscrivere il limite come:

$$\left(\frac{10}{e}\right)^{\ln n} \cdot \frac{e^{\ln n}}{n^2+1} = \left(\frac{10}{e}\right)^{\ln n} \cdot \frac{n}{n^2+1} =$$

$$\left(\frac{10}{e}\right)^{\lg_{\frac{10}{e}} n \cdot \ln \frac{10}{e}} \cdot \frac{n}{n^2+1} = n^{\ln \frac{10}{e}} \frac{n}{n^2+1} \to \infty$$

l'ultimo passaggio tiene conto del fatto che $\ln \frac{10}{e} > 1$.

(v) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\tan\frac{1}{n}} n \tan\frac{1}{n}} = e.$
Si e' tenuto conto dei limiti notevoli $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$ se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, e $\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = 1$.

(vi) $\lim_{n\to\infty} \arctan(n^2-1)\frac{\cos 2n\pi}{n\pi} = \frac{\pi}{2}\cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \to 0$

(vii) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+\ln n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n(\frac{3}{2})}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n(\frac{\ln n}{2n})} \to$
$\to\ e^{\frac{3}{2}} \cdot \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{2n}} \ \to\ e^{\frac{3}{2}}.$

$(viii)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{2+n^2}{n^3}\cot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+n^2}{n^3}\frac{\cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+n^2}{n^2}\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}}{n\sin\frac{1}{n}} =$
$1.$ (ix) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n}\right)^{\cot\frac{1}{n}}$
Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2+n^2}{n^3}\right)^{\frac{n^3}{2+n^2}}\right]^{\frac{2+n^2}{n^3}\cot\frac{1}{n}} \to\ e.$$

Esercizio 2

Consideriamo la successione:

$$x_n = a^n \frac{(-1)^n}{(n^2+1)\sin\frac{1}{n^2}}$$

la frazione tende a $\frac{(-1)^n}{1}$, per cui il limite é sicuramente indeterminato se $|a| \geq 1$. Infatti se $a = \pm 1$ $\lim_{n\to\infty} x_n = (-1)^n$, se se $|a| > 1$ $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$. Invece se $|a| < 1$ il limite é 0.