AL4 - NUMERI ALGEBRICI, A.A. 2001/2002

Valutazione in itinere

MATRICOLA: ....

COGNOME:.......................... **NOME:**....................

ESERCIZIO 1. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{6})$.

(a) Descrivere esplicitamente l'anello degli interi $\mathcal{O}_K$ determinando una sua base intera e calcolare il discriminante di K.

(b) Mostrare che 2 e 3 non sono irriducibili in $\mathcal{O}_K$ e che 6 ha più di una fattorizzazione in elementi irriducibili in $\mathcal{O}_K$.

(c) Siano $I := (2, \sqrt{6})\mathcal{O}_K$, $I' := (2, 3\sqrt{6})\mathcal{O}_K$, $J := (3, \sqrt{6})\mathcal{O}_K$ e $J' := (3, 2\sqrt{6})\mathcal{O}_K$. Determinare se I, I', J e J' sono ideali primi.

(d) Siano $I_0 := 2\mathbb{Z} + 3\sqrt{6}\mathbb{Z}$, e $J_0 := 3\mathbb{Z} + 2\sqrt{6}\mathbb{Z}$. Determinare se $I' = I_0$ e $J' = J_0$.

(e) Determinare nell'anello $\mathcal{O}_K$ la fattorizzazione (unica) come prodotto di ideali primi dell'ideale $6\mathcal{O}_K$.

ESERCIZIO 2. Siano a e b due interi non nulli e sia

$$f(X) := X^2 + aX + b \in \mathbb{Z}[X]$$

un polinomio irriducibile a coefficienti interi con discriminante $\Delta_f := a^2 - 4b < 0$ e sia ξ un numero complesso tale che $f(\xi) = 0$.

Poniamo $K := \mathbb{Q}(\xi)$ e sia $\xi' := f'(\xi) = 2\xi + a$, dove $f'(X)$ è il polinomio derivato del polinomio $f(X)$.

(a) Determinare il polinomio minimo $h(X)$ di ξ' su $\mathbb{Q}$ e mostrare che questo è un polinomio quadratico a coefficienti in $\mathbb{Z}$ con discriminante $\Delta_h = n \cdot \Delta_f$, per un qualche intero n.

(b) Calcolare $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\xi)$, $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\xi')$, $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\xi)$ e $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\xi')$.

(c) Dopo aver ricordato la relazione generale esistente tra la norma di $\xi' = f'(\xi)$ ed il discriminante $\Delta(1, \xi)$, calcolare esplicitamente – in funzione di a e b – il valore di $\Delta(1, \xi)$. Calcolare $\Delta(1, \xi')$.

(d) Determinare se esiste una relazione tra i campi $K := \mathbb{Q}(\xi)$ e $K' := \mathbb{Q}(\xi')$, e, nel caso in cui Δ_f sia un intero privo di fattori quadratici, determinare una base intera per K e K'.

(e) Sia $a := 3$ e $b := 5$, e sia $\mathcal{O}_K$ l'anello degli interi di $K = \mathbb{Q}(\xi)$.

(e.1) Determinare una base intera di $\mathcal{O}_K$.

(e.2) Trovare una base come $\mathbb{Z}$–modulo libero dell'ideale $I := (4, 2 \cdot \xi)\mathcal{O}_K$ e calcolare la norma di I.

TEMA. **(a)** Moduli liberi su un dato anello A (ad esempio $A := \mathbb{Z}$). Mostrare che ogni sottomodulo N di un A–modulo M finitamente generato e libero è un

A–modulo finitamente generato e libero. Inoltre, l'A–modulo quoziente M/N ha un numero finito di elementi se e soltanto se $\mathrm{rango}(M) = \mathrm{rango}(N)$.
(b) Basi intere in campi quadratici.

ESERCIZIO 1 - SOLUZIONE. **(a)** $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{6}]$, perché $6 \equiv 2 \pmod 4$.

(b) Sia $\alpha := 2 + \sqrt{6}$ e, quindi, $\overline{\alpha} = 2 - \sqrt{6}$. E' subito visto che $2 = -\alpha\overline{\alpha}$ e che α (e $\overline{\alpha}$) è irriducibile perché ha norma uguale a 2.

Sia $\beta := 3 + \sqrt{6}$ e, quindi, $\overline{\beta} = 3 - \sqrt{6}$. E' subito visto che $3 = \beta\overline{\beta}$ e che β (e $\overline{\beta}$) è irriducibile perché ha norma uguale a 3.

(c) Sia $I = (2, \sqrt{6})\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ [rispettivamente $J = (3, \sqrt{6})\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$], allora I [rispettivamente, J] è un ideale primo (= massimale) perché $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]/I$ [rispettivamente, $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]/J$] è canonicamente isomorfo al campo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [rispettivamente, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$].

Non è difficile mostrare che $I' = 2\mathbb{Z} + 2\sqrt{6}\mathbb{Z} + 3\sqrt{6}\mathbb{Z} + 3\cdot 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + \sqrt{6}\mathbb{Z}$ e, quindi, $\mathcal{O}_K/I'$ è canonicamente isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Infatti $2\mathbb{Z} + 18\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ e $2\sqrt{6}\mathbb{Z} + 3\sqrt{6}\mathbb{Z} = \sqrt{6}\mathbb{Z}$, perché in generale $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathrm{MCD}(a, b)\mathbb{Z}$ e quindi $a\gamma\mathbb{Z} + b\gamma\mathbb{Z} = \mathrm{MCD}(a, b)\gamma\mathbb{Z}$, per ogni $\gamma \in \mathcal{O}_K$. Dunque, $I' = I$.

In modo analogo si dimostra che $J' = 3\mathbb{Z} + \sqrt{6}\mathbb{Z} = (3, \sqrt{6})\mathbb{Z}[\sqrt{6}] = J$ e, quindi, $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]/J' = \mathbb{Z}[\sqrt{6}]/J \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(d) Si noti che $I_0 := (2, 3\sqrt{6})\mathbb{Z} \subsetneq I' = (2, 3\sqrt{6})\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$, perché ad esempio $2\sqrt{6} \in I' \setminus I_0$ e quindi $\sqrt{6} \in I \setminus I_0$, perciò $I' = (2, \sqrt{6})\mathcal{O}_K = I$.

Analogamente si dimostra che $J_0 \subsetneq J'$.

(e) Da (c) segue subito che $I^2 = 2\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ e che $J^2 = 3\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ (si noti anche che $I = \overline{I}$ e $J = \overline{J}$). Pertanto:

$$6\mathbb{Z}[\sqrt{6}] = I^2 \cdot J^2.$$

ESERCIZIO 2 - SOLUZIONE. **(a)** $\xi = (\xi' - a)/2$. Pertanto, il polinomio minimo di ξ' è il polinomio $h(X) = (X - a)^2 + 2a(X - a) + 4b = X^2 + 4b - a^2$, essendo: $0 = ((\xi' - a)/2)^2 + a(\xi' - a)/2 + b$. Dunque $\Delta_h = 4(a^2 - 4b) = 4\Delta_f$.

(b) Il termine costante di $g(X)$ (cioè, $4b - a^2$) coincide con $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\xi')$, mentre l'opposto del coefficiente del termine lineare di $g(X)$ (cioè, 0) coincide con $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\xi')$. Ovviamente, per le analoghe ragioni, $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\xi) = b$ e $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\xi) = -a$.

(c) $\Delta(1, \xi) = (-1)^{2(2-1)/2} N_{K/\mathbb{Q}}(f'(\xi)) = -N_{K/\mathbb{Q}}(\xi') = a^2 - 4b$ [tale discriminante coincide con la definizione usuale di discriminante del polinomio quadratico $f(X)$]. Per una ragione analoga si ha che $\Delta(1, \xi') = (-1)^{2(2-1)/2} N_{K/\mathbb{Q}}(h'(\xi')) = -N_{K/\mathbb{Q}}(2\xi')$. Non essendo la norma additiva, non possiamo da questa formula dedurre una espressione esplicita di $\Delta(1, \xi')$ in funzione di a e di b. Tuttavia notiamo che, per ragioni di dimensione come $\mathbb{Q}$–spazio vettoriale, $\mathbb{Q}(\xi') = \mathbb{Q}(\xi) = K$ e quindi, osservando che la matrice di cambiamento di base ($\{1, \xi'\}$ in funzione di $\{1, \xi\}$) è data da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

deduciamo che $\Delta(1, \xi') = 2^2 \cdot \Delta(1, \xi) = 4(a^2 - 4b)$.

(d) Abbiamo già osservato che $K' = \mathbb{Q}(\xi') = \mathbb{Q}(\xi) = K$. Notiamo, poi, che ξ, ξ' appartengono a $\mathcal{O}_K$, perché sono radici di polinomi monici a coefficienti interi. Se

$\Delta(1,\xi) = a^2 - 4b =: d$ un intero privo di fattori quadratici, allora $\{1,\xi\}$ è una base intera di K, mentre $\{1,\xi'\}$ non è una base intera di K, perché $|\Delta(1,\xi')| > |\Delta(1,\xi)|$.

Un altro modo per ottenere una base intera di $\mathcal{O}_K$ è quello di osservare che in questo caso $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ con $d = a^2 - 4b \equiv a^2 \equiv 1 \pmod 4$; quindi $\{1, (1+\sqrt{d})/2\}$ è una base intera per $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[(1+\sqrt{d})/2]$.

(e) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-11})$, $\xi = (-3+\sqrt{-11})/2$, e $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \xi\mathbb{Z}$ (ovvero, per quanto visto sopra, $d = -11$ e $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + ((1+\sqrt{-11})/2)\mathbb{Z})$.

$I = 4(\mathbb{Z}+\xi\mathbb{Z}) + 2\xi(\mathbb{Z}+\xi\mathbb{Z}) = 4\mathbb{Z}+4\xi\mathbb{Z}+2\xi\mathbb{Z}+2\xi^2\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}+2\xi\mathbb{Z}+2(-3\xi-5)\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}+2\xi\mathbb{Z}+(6\xi+10)\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}+2\xi\mathbb{Z}+10\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}+2\xi\mathbb{Z}$ (perché $2\xi\mathbb{Z}+(6\xi+10)\mathbb{Z} = 2\xi\mathbb{Z}+10\mathbb{Z}$).

Ora, $\Delta(\mathcal{O}) = \Delta(1,\xi) = -11$ e poi $\Delta(I) = \Delta(4, 2\xi) =$

$$\left\| \begin{matrix} 2 & 2\xi \\ 2 & 2\bar{\xi} \end{matrix} \right\|^2 .$$

Dunque $\Delta(I) = 4^2\Delta(1,\xi)$ e quindi $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(I) = \sqrt{4^2\Delta(1,\xi)/\Delta(1,\xi)} = 4$.