Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

TUTORATO 5 - 8 Ottobre 2001

1. Sia N un sottogruppo del gruppo G. Mostrare che, se G è commutativo, rispettivamente ciclico, allora il gruppo quoziente $\frac{G}{N}$ è commutativo, rispettivamente ciclico.

2. Determinare tutti i possibili gruppi quoziente di $\mathbb{Z}_{12}$.

3. Mostrare che $\mathbf{V}_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ è un sottogruppo normale di $\mathbf{S}_4$. Calcolare le sue classi laterali in $\mathbf{S}_4$ e mostrare che il gruppo quoziente $\frac{\mathbf{S}_4}{\mathbf{V}_4}$ è isomorfo ad $\mathbf{S}_3$.

4. Mostrare che il sottogruppo $H = \{(1), (12)(34)\}$ di
$\mathbf{V}_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ è normale in $\mathbf{V}_4$ ma non in $\mathbf{A}_4$.

5. Sia D_6 il gruppo delle isometrie dell'esagono regolare. Mostrare che D_6 è isomorfo al sottogruppo di $\mathbf{S}_6$ generato da $\delta = (26)(35)$ e $\rho = (123456)$.

6. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo di ordine 2. Mostrare che H è normale in G se e soltanto se H è contenuto nel centro di G.

7. Mostrare che un sottogruppo di indice 2 è normale.

8. Mostrare che ogni sottogruppo del gruppo $\mathbf{H}$ delle unità dei quaternioni è normale.