Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

TUTORATO 1 - 21 Settembre 2001

1. Stabilire se i seguenti insiemi formano un gruppo rispetto all'operazione indicata (dare per scontata la validitá della proprietá associativa)

(a) Le matrici $n \times n$ ad elementi in $\mathbb{R}$ con determinante uguale a 1,
le matrici $n \times n$ ad elementi in $\mathbb{R}$ con determinante uguale a -1,
le matrici $n \times n$ ad elementi in $\mathbb{R}$ con determinante uguale ad 1 oppure uguale a -1, rispetto al prodotto righe per colonne.

(b) Le traslazioni (cioè, le applicazioni $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_t(x) = x + t, t \in \mathbb{R}$) rispetto alla composizione di funzioni.

2. Dimostrare le seguenti affermazioni:

(i) $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$ se e soltanto se $b \mid a$;

(ii) $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$, dove $m = m.c.m.(a, b)$.

(iii) $< a, b >= d\mathbb{Z}$, dove $d = MCD(a, b)$

3. Determinare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}$ contenenti 10.

4. Determinare quali dei seguenti gruppi sono ciclici:

$$(\mathbb{Z}_5, +), (\mathbb{Z}_6, +), (U(Z_5), \cdot), (U(Z_7), \cdot), (U(Z_{14}), \cdot).$$

5. Mostrare che $(\mathbb{Q}, +)$ e $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ non sono ciclici.

6. Mostrare che ogni gruppo ciclico è commutativo.