Universitá degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
Lavoro guidato (a cura di Giampaolo Picozza)
Martedí 9 ottobre, Giovedí 11 ottobre

1. Determinare tutti gli omomorfismi da $\mathbf{H}$ a $\mathbf{D_4}$, dove $\mathbf{H}$ è il gruppo dei quaternioni.

2. Dimostrare che due permutazioni $\sigma, \sigma' \in \mathbf{S_n}$ sono coniugate se, e soltanto se, hanno la stessa struttura ciclica.

3. Siano $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \in \mathbf{S_7}$, $\sigma_1 = (135)(24)$, $\sigma_2 = (23)(17)(45)$, $\sigma_3 = (273)(14)$, $\sigma_4 = (17)(234)$, $\sigma_5 = (12)$ e $\sigma_6 = (27)(13)(56)$. Determinare quali fra queste permutazioni sono coniugate in $\mathbf{S_7}$ e trovare due distinte permutazioni che le coniugano.

4. Determinare le classi coniugate di S_4.

5. Determinare se le permutazioni $\sigma = (123)$ e $\tau = (124)$ sono coniugate in $\mathbf{A_4}$ e in $\mathbf{S_4}$.

6. Dimostrare che un sottogruppo è normale se, e soltanto se, è unione di classi coniugate.

7. Determinare tutti i sottogruppi normali di $\mathbf{S_4}$

8. Determinare le classi coniugate di $\mathbf{A_4}$ e tutti i suoi sottogruppi normali.

9. Siano G un gruppo e H un sottogruppo di G unico del suo ordine. Dimostrare che H è caratteristico in G.

10. Un gruppo si dice *semplice* se non ha sottogruppi normali non banali. Dimostrare che $\mathbf{A_5}$ è semplice.

11. Siano $(G, *)$ e $(G', *')$ due gruppi. Consideriamo il gruppo $G \times G'$ con l'operazione "componente per componente" definita da

$$(g, g')(h, h') = (g * h, g' *' h').$$

Siano $\overline{G} = \{(g, e'), g \in G\}$ e $\overline{G'} = \{(e, g'), g' \in G'\}$, dove e è l'elemento neutro di G e e' è l'elemento neutro di G'. Dimostrare che G è prodotto diretto interno di $\overline{G}$ e $\overline{G'}$.