Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

ESERCIZI
2 Ottobre 2001

1. Siano A un insieme e $(G, \cdot)$ un gruppo. Indichiamo con $\mathcal{F}(A, G)$ l'insieme di tutte le applicazioni $f : A \longrightarrow G$.

Mostrare che:

(a) $(\mathcal{F}(A, G), \cdot)$ è un gruppo con l'operazione definita nel seguente modo: se $f, g \in \mathcal{F}(A, G)$, allora $fg : A \longrightarrow G$ è l'applicazione definita da
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

(b) Se G è finito, ogni $f \in \mathcal{F}(A, G)$ ha ordine finito.

2. Se $(G, +)$ e $(G', +)$ sono gruppi commutativi, allora il sottoinsieme $\mathrm{Hom}(G, G')$ di $\mathcal{F}(G, G')$ costituito da tutti gli omomorfismi di G in G' è un gruppo commutativo rispetto all'operazione *somma puntuale* definita da
$$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$$
(ed è un sottogruppo di $(\mathcal{F}(G, G'), +)$).

3. Determinare il gruppo $(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{30}, \mathbb{Z}_{21}), +)$.

4. Si consideri l'applicazione
$$\alpha : (\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m), +) \longrightarrow \mathbb{Z}_m; \quad \phi \longrightarrow \phi([1]_n).$$

Mostrare che:

(a) α è un omomorfismo di gruppi iniettivo;

(b) $\mathrm{Im}(\alpha)$ è il sottogruppo di $\mathbb{Z}_m$ generato da $[m/d]_m$, dove $d = MCD(n, m)$. In particolare $(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m), +)$ è un gruppo ciclico di ordine $d = MCD(n, m)$.