Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

ESERCIZI
21 Settembre 2001

Siano $(G, *)$ e $(G', *')$ due gruppi. Mostrare che:

1. $G \times G'$ è un gruppo con l'operazione "componente per componenete" definita da
$$(g, g')(h, h') = (g * h, g' *' h').$$
Inoltre $G \times G'$ è commutativo se e soltanto se lo sono G e G'.

2. Se $g \in G$ ha ordine n e $g' \in G'$ ha ordine m, allora $(g, g') \in G \times G'$ ha ordine $mcm(n, m)$.

3. Se G è ciclico di ordine n e G' è ciclico di ordine m, allora $G \times G'$ è ciclico se e soltanto se $MCD(n, m) = 1$. In tal caso determinare i suoi generatori.

4. Se $G \times G'$ è ciclico, allora G e G' sono ciclici. In questo caso, come si possono determinare tutti i sottogruppi di $G \times G'$?

5. Verificare che $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ è un gruppo ciclico rispetto alla somma sulle componenti. Esplicitare i suoi generatori e determinare tutti i suoi sottogruppi.