Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

TUTORATO 11 - 29 Ottobre 2001

1. Sia A un anello commutativo unitario e sia $\mathcal{M}_n(A)$ l'anello delle matrici $n \times n$ a valori in A.

Mostrare che,

(a) Se I è un ideale di A, l'insieme $\mathcal{M}_n(I)$ delle matrici $n \times n$ a valori in I è un ideale di $\mathcal{M}_n(A)$.

(b) Se $\mathcal{H}$ è un ideale di $\mathcal{M}_n(A)$, l'insieme $I_{\mathcal{H}}$ degli elementi di A che compaiono nelle matrici di $\mathcal{H}$ è un ideale di A ed inoltre $\mathcal{H} = \mathcal{M}_n(I_{\mathcal{H}})$.

(*Suggerimento*: Indichiamo con $E_{i,j}$ la matrice elementare i cui elementi sono tutti zero, tranne l'elemento di posto i, j che è uguale ad 1. Se $a \in I_{\mathcal{H}}$ compare al posto h, k della matrice $M \in \mathcal{H}$, allora $E_{1,h}ME_{k,1} \in \mathcal{H}$ è la matrice i cui elementi sono tutti zero, tranne l'elemento di posto $1, 1$ che è uguale ad a).

(b) La corrispondenza definita da $I \to M_n(I)$ è una corrispondenza biunivoca tra gli ideali di A e gli ideali di $\mathcal{M}_n(A)$ che conserva le inclusioni. In particolare, se I è massimale in A, allora $M_n(I)$ è massimale in $M_n(A)$.

2. Siano $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p)$ gli anelli delle matrici 2×2 a valori rispettivamente in $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_p$, con p primo.

Si consideri l'applicazione:

$$\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p) \text{ definita da } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

Mostrare che φ è un omomorfismo suriettivo di anelli e $\mathrm{Ker}(\varphi)$ è un ideale massimale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Ma tuttavia l'anello quoziente $\frac{\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})}{\mathrm{Ker}(\varphi)}$ non è un campo (notare che l'anello $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ non è commutativo).