Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2001/2002
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato
Mercoledi 21 novembre

1. Provare che:

1. ogni numero primo della forma $3n+1$ è anche della forma $6m+1$;
2. l'unico numero primo della forma n^3-1 è 7;
3. l'unico numero primo p per cui $3p+1$ è un quadrato è 5.

2. Per ciascuna delle seguenti classi resto modulo n, $[x]_n$, determinare un rappresentante x' tale che $0 \leq x' \leq n-1$:
$[-358]_{48}$, $[1256]_{107}$, $[-7456]_{35}$, $[283]_{11}$.

3. Stabilire quali dei seguenti elementi di $\mathbb{Z}_n$ sono zero-divisori e quali sono invertibili; per ciascuno degli elementi invertibili trovare l'inverso:

1. $[-35]_{12}$, $[19]_{12}$, $[42]_{12}$, $[-44]_{12}$, $[17]_{12}$;
2. $[-32]_{18}$, $[23]_{18}$, $[42]_{18}$, $[-44]_{18}$, $[28]_{18}$.

4. Provare che:

1. se n è un intero dispari, allora $n^2 \equiv 1 \pmod 8$. Dedurne che la somma dei quadrati di tre numeri interi non è mai congrua a $7 \pmod 8$;
2. l'equazione $x^2+y^2-15z^2=7$ non ha soluzioni intere.

5. Provare che:

1. per ogni numero intero n, si ha che $n^3 \equiv 0,1,8 \pmod 9$;
2. per ogni numero intero n, si ha che $n^3 \equiv n \pmod 6$.

6. Verificare che se $a \equiv b \pmod{n_1}$ e $a \equiv b \pmod{n_2}$, allora $a \equiv b \pmod n$ ove $n=$mcm(n_1,n_2). Quindi se MCD(n_1,n_2)=1, allora $a \equiv b$ (modn_1n_2).

7. tProvare che se $x \equiv a \pmod n$, allora $x \equiv a \pmod{2n}$ oppure $x \equiv a+n \pmod{2n}$.