

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2001/2002
AL1 - Algebra 1, fondamentali
Tutorato
Mercoledì 17 ottobre

1. Sia $X = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 3\}$. Nel prodotto cartesiano $X \times X$ si consideri la seguente relazione d'ordine:

$$(a, b)\rho(c, d) \iff a \text{ divide } c \text{ e } b \leq d$$

con $a, b, c, d \in X$.

1. Stabilire se l'insieme ordinato $(X \times X, \rho)$ è totalmente ordinato.
2. Determinare gli eventuali elementi minimali di $(X \times X, \rho)$.
3. Determinare gli eventuali elementi massimali di $(X \times X, \rho)$.
4. Stabilire se esiste l'estremo inferiore e l'estremo superiore in $(X \times X, \rho)$ di $A = \{(12, 5), (21, 20), (5, 10)\}$

2. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che:

1. per ogni $n \geq 1$ si ha che $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$;
2. per ogni $n \geq 1$ si ha che $1(1!) + 2(2!) + \dots + n(n!) = (n + 1)! - 1$;
3. per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

4. per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2;$$

5. per ogni $n \geq 4$ si ha che $n! > n^2$;
6. per ogni $n \geq 6$ si ha che $n! > n^3$;
7. per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$(-1)1 + (-1)^2 2^2 + \dots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$