

**Università degli studi di Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002**  
**Algebra 1- Lavoro Guidato - Dr. Francesca Tartarone**  
Lunedì 26 novembre

1. Dimostrare che se  $p$  è un numero primo, allora  $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ .
2. Determinare tutte le eventuali soluzioni dei seguenti sistemi di congruenze:

$$\begin{cases} 2X \equiv 3 \pmod{5} \\ 3X \equiv 4 \pmod{7} \\ 3X \equiv 5 \pmod{8} \\ 6X \equiv 1 \pmod{13} \end{cases} .$$

$$\begin{cases} 2X \equiv 1 \pmod{5} \\ 3X \equiv 9 \pmod{6} \\ 4X \equiv 1 \pmod{7} \\ 5X \equiv 9 \pmod{11} \end{cases} .$$

$$\begin{cases} 2X \equiv 2 \pmod{4} \\ 2X \equiv 3 \pmod{5} \\ 14X \equiv 7 \pmod{21} \end{cases} .$$

3. Trovare tutte le soluzioni modulo 35 della seguente congruenza lineare:

$$5X \equiv 20 \pmod{35}.$$

4. Dimostrare che se  $p \geq 5$  è un primo dispari, allora  $2(p - 3)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

5. Provare che:

- 1) ogni primo della forma  $3n + 1$  è anche della forma  $6m + 1$ ;
- 2) ogni intero della forma  $3n + 2$  possiede un fattore primo della stessa forma;

6. Stabilire se l'insieme  $\{3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6\}$  è un sistema ridotto di residui modulo 17.