Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
Algebra 1- Lavoro Guidato - Dr. Francesca Tartarone
Giovedí 20 dicembre

1. Applicare l'algoritmo della divisione euclidea alle seguenti coppie di polinomi e calcolarne il massimo comune divisore:

(1) $f(X) = 2X^5 - \frac{2}{3}X^4 - \frac{31}{9}X^3 - \frac{13}{12}X^2 + \frac{1}{9}X + \frac{1}{6}$, $g(X) = \frac{2}{3}X^2 + X + \frac{1}{6}$, in $\mathbb{Q}[X]$;
(2) $f(X) = X^6 - 6X^4 + 12X^2 - 8$, $g(X) = X^3 - X - 2$, in $\mathbb{Z}[X]$;
(3) $X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 1$, $g(X) = 3X^4 + 9X^3 + 10X^2 + 5X + 1$, in $\mathbb{Z}[X]$.

2. Fattorizzare il polinomio $X^4 - 4$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$.

3. Trovare tutti i polinomi associati di $f(X) = 4X^2 + 2X + 1$ in $\mathbb{Z}[X]$. Trovare 5 elementi associati di $f(X)$ in $\mathbb{Q}[X]$.

4. Sia p un numero primo di $\mathbb{Z}$. Dire se p resta primo come elemento di $\mathbb{Z}[X]$ e di $\mathbb{Q}[X]$.

5. Utilizzare il criterio di Eisenstein per dimostrare che il polinomio $X^4 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$.

6. Determinare esplicitamente i divisori di $f(X) = 2X^2 + 6X + 4$ in $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Z}_2[X]$, $\mathbb{Z}_3[X]$, $\mathbb{Z}_5[X]$, $\mathbb{Z}_9[X]$, $\mathbb{Q}[X]$.