Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
Algebra 1- Lavoro Guidato - Dr. Francesca Tartarone
Martedí 20 novembre

1. Dimostrare che se $a, b, c \in \mathbb{Z}$ allora a è relativamente primo con bc se e soltanto se a è relativamente primo con b e con c.

2. Sia φ la funzione di Eulero. Dimostrare che:

(1) $\varphi(p^e) = p^e - p^{e-1}$, se p è un numero primo ed e è un intero positivo ;
(2) $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{p_i})$, se $n \in \mathbb{N}$ e $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$;

3. Scrivere le tabelle additive e moltiplicative di $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_9$.

4. Se $n \geq 1$ non è primo, allora $(n-1)! \equiv 0(\mod n)$.

5. Sia a un intero non nullo, scriviamo $|a|$ in forma decimale come $|a| = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$, con ogni $0 \leq a_i \leq 9$ e $a_m \neq 0$.
Siano:

$$S(a) = \sum_{i=0}^{m} a_i, \qquad A(a) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i a_i.$$

Dimostrare i seguenti criteri di divisibilità :

(1) $2|a \Leftrightarrow 2|a_0$;
(2) $3|a \Leftrightarrow 3|S(a)$;
(3) $4|a \Leftrightarrow 4|(a_1 10 + a_0)$
(4) $5|a \Leftrightarrow 5|a_0$;
(5) $9|a \Leftrightarrow 9|S(a)$;
(6) $11|a \Leftrightarrow 11|A(a)$;

6. Sia $n \in \mathbb{N}^+$. Dimostrare che se n non è primo allora esiste un primo p che divide n e tale che $p \leq \sqrt{n}$.

7. Dimostrare che esistono infiniti primi della forma $4n + 3$, con $n \in \mathbb{N}$.