**Università degli studi di Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002**
**Algebra 1- Lavoro Guidato - Dr. Francesca Tartarone**
Lunedí 3 dicembre

**1.** Applicare l'algoritmo della divisione euclidea con il resto in $\mathbb{Q}[X]$ alle coppie di polinomi:

(1) $f(X) = 2X^2 + X + 4$, $g(X) = 3X^2 + 2X + 1$;
(2) $f(X) = 4X^3 + 3X^2 + 2X + 7$, $g(X) = 2X^2 + 5X + 1$;
(3) $f(X) = X^4 + X^2 + X + 1$, $g(X) = X^3 + 2X + 2$.

**2.** Trovare il massimo comun divisore delle seguenti coppie di polinomi in $\mathbb{Q}[X]$:

(1) $f(X) = X^5 + X^4 - X^3 - 3X + 2$, $g(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2$;
(2) $f(X) = 3X^4 - 6X^3 + 12X^2 + 8X - 6$, $g(X) = X^3 - 3X^2 + 6X - 3$;
(3) $f(X) = X^5 + X^3 + X$, $g(X) = X^4 + 2X^3 + 2X$;
(4) $f(X) = X^5 + 3X^3 + X^2 + 2X + 2$, $g(X) = X^4 + 3X^3 + 3X^2 + X + 2$.

**3.** Scomporre in fattori primi il polinomio $X^4 - 1$ in $\mathbb{Z}_{11}$ e $\mathbb{Z}_{13}$.

**4.** Dimostrare che il massimo comun divisore dei polinomi $X^n - 1$ e $X^m - 1$ è $X^d - 1$, dove $\mathrm{MCD}(n, m) = d$ e $f(X) \in A[X]$ con $A \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

**5.** Sia $f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ e sia $\alpha = x/y$, $\mathrm{MCD}(x, y) = 1$ tale che $f(\alpha) = 0$. Mostrare che $x|a_0$ e $y|a_n$.

**6.** Sia $f(X) = a_0 + a_1X$ un polinomio lineare di $\mathbb{Z}[X]$. Mostrare che $f$ è irriducibile se e soltanto se $f$ è primitivo.