From mancini@mat.uniroma3.it Thu Dec 14 09:40:09 2000 Date: Tue, 30 May 2000 17:59:21 +0
From: Gianni Mancini ¡mancini@mat.uniroma3.it¿ To: programmi@web.mat.uniroma3.it Subject:
gramma AM9

AM9 Analisi Funzionale, 1^0 Modulo

A.A. 1999/2000

Prof. Giovanni Mancini

Principi dell' Analisi Funzionale Lineare e applicazioni

1. Generalità sugli spazi normati e gli operatori limitati. Spazi di Hilbert

Spazi normati, metrica associata ad una norma, convergenza. Successioni di Cauchy, spazi di Banach. Esempi: l^∞ con la norma della convergenza uniforme, c, c_o, l^p.Densitá di l^p in l^∞. Spazi L^p: le diseguaglianze di Holder e di Minkowskii, completezza.

Operatori lineari continui tra spazi di Banach, norma di un operatore . Isometrie, isomorfismi lineari topologici. Completezza di $L(E, F)$. L'insieme degli isomorfismi lineari e topologici è aperto. Lo spazio duale. Il duale di l^1 è isometricamente isomorfo a l^∞. Il duale di l^p.

Spazi di Hilbert, la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz, le regole di Pitagora e del parallelogramma. Proiezione ortogonale. Il teorema di rappresentazione di Riesz. La diseguaglianza di Bessel, l'identita' di Parseval. Basi ortonormali, esistenza di una base ortonormale numerabile negli Hilbert separabili. Il teorema di isomorfismo. Serie di Fourier inL^2.

2. Il Teorema di Hahn-Banach, il Principio di Uniforme Limitatezza, il Teorema di Isomorfismo di Banach e applicazioni

Il teorema di prolungamento di Hahn-Banach. Funzionale di Minkowskii e teoremi di separazione. Prime applicazioni: i funzionali lineari e continui separano i punti, una caratterizzazione dei sottospazi lineari densi, funzionali lineari e continui su l^∞ che non possono essere rappresentati mediante elementi di l^1.

Una successione di vettori in un Hilbert, che diverga in norma, diverge lungo qualche direzione; se una famiglia di operatori limitati tra due spazi di Banach è limitata in ogni punto, allora è uniformemente limitata sui limitati; se una famiglia L_α di operatori lineari e limitati è non limitata in norma, allora esiste un insieme denso D di punti tale che $\sup_\alpha ||L_\alpha(x)|| = +\infty, \forall x \in D$. Una applicazione: funzioni continue la cui serie di Fourier diverge.

Il Teorema della mappa aperta e dell' Isomorfismo di Banach. La norma del grafico, il teorema del grafico chiuso. Somma diretta, continuità dei proiettori. Una applicazione: successioni che sono coefficenti di Fourier di funzioni sommabili.

3. Compattezza, convergenza debole e riflessività

Il Lemma di Riesz. Compattezza in spazi di Banach: diagonalizzazione di Cantor ed il teorema di Ascoli-Arzelà. Il Teorema di Frechet-Kolmogoroff.

Convergenza puntuale (ω^*) in E'. Ogni successione in E' puntualmente convergente è limitata in norma. Se E è separabile, ogni successione limitata in E' ammette sottosuccessioni puntualmente convergenti.

Base di intorni per la topologia ω^*, la palla unitaria in E' è ω^* compatta. Convergenza debole. Semicontinuità sequenziale debole della norma. Il Lemma di Mazur; se x_n converge debolmente a x, allora x è limite in norma di una successione di combinazioni lineari convesse degli x_n.

Immersione isometrica di un Banach nel suo biduale, riflessività. Esempi di spazi riflessivi: gli Hilbert, gli L^p. Esempi di spazi non riflessivi: l^1, l^∞. Il duale di uno spazio riflessivo separabile è separabile; un sottospazio lineare chiuso di uno spazio riflessivo è riflessivo. Ogni successione limitata in un Banach riflessivo ammette sottosuccessioni debolmente convergenti; il teorema di Eberlein-Smulyan. Una applicazione: ogni convesso chiuso in un Banach riflessivo è dotato di elemento di norma minima.

4. Alternativa di Fredholm per operatori limitati, il caso degli operatori compatti

Operatori lineari limitati in spazi di Hilbert. L'operatore aggiunto, operatori autoaggiunti. Alternativa di Fredholm: $\overline{L(H)}$ é l'ortogonale di Ker L'.

Operatori compatti, esempi. Un operatore lineare continuo di un Hilbert in se è compatto se e solo se trasforma successioni debolmente convergenti in successioni convergenti in norma. L'insieme degli operatori lineari compatti è chiuso. Un operatore lineare continuo di un Hilbert in se' é compatto se e solo se lo è il suo aggiunto.

Alternativa di Fredholm per perturbazioni compatte dell'identitá: (i) se $K \in L(H)$ è compatto e $L := I - K$, allora $\dim Ker L < +\infty$, (ii) L ha immagine chiusa, (iii) L è iniettivo se e solo se è suriettivo, (iv) la dimensione del nucleo di L è uguale alla dimensione dell'ortogonale della sua immagine.

5. Analisi spettrale degli operatori compatti, il caso autoaggiunto

Lo spettro $\sigma(L)$ di un operatore lineare continuo L; $\sigma(L)$ è compatto. Autovalori ed autovettori. Se L é compatto, allora $0 \in \sigma(L)$ e ogni $\lambda \in \sigma(L), \lambda \neq 0$ è un autovalore, con $\dim Ker(L - \lambda I) < \infty$. Ogni autovalore non nullo è isolato. Operatori autoaggiunti:

$\inf\{< Lx, x >: ||x|| = 1\} = \min \sigma(L)$ e $\sup\{< Lx, x >: ||x|| = 1\} = \max \sigma(L)$. $< Lx, x >= 0, \forall x \Rightarrow L = 0$.

Base ortonormale di autovettori generata da un operatore autoaggiunto compatto, rappresentazione rispetto ad una base di autovettori.

Problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine: rappresentazione integrale delle soluzioni, carattere compatto del risolvente. Analisi spettrale.

6. Derivate deboli, spazi di Sobolev e soluzioni deboli dell'equazione di Laplace

L'equazione $-\Delta u + u = f$ in Ω , $u = 0$ su $\partial\Omega$, $\Omega \subset R^N$ aperto. Soluzioni classiche e soluzioni deboli. Derivata debole di una funzione L^1_{loc}. Lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, completezza, riflessività. Teoremi di densità. Lo spazio $H^1_o(\Omega)$. Traccia sul bordo di una funzione $H^1_o(\Omega)$. Esistenza ed unicità della soluzione debole. Equazioni di evoluzione, il teorema di Hille-Yosida.

7. Diseguaglianze di Sobolev-Morrey-Poincarè, il Teorema di Rellich. Decomposizione spettrale del Laplaciano. Regolarità all'interno

Diseguaglianze integrali: una formula di rappresentazione per funzioni $C^\infty_o : u(x) = 1/\omega_N \int_{R^N} < \nabla u(y), x-y/|x-y|^N >$. Convoluzione col nucleo $H(x) = 1/|x|^{N-1}$ e derivazione delle diseguaglianze di Sobolev e Morrey.

Il teorema di Rellich: una dimostrazione via Frechet-Kolmogoroff. Ogni successione debolmente convergente in $H^1_0(\Omega)$ converge in norma L^2: una dimostrazione via formula di rappresentazione e regolarizzazione. Armoniche deboli, autofunzioni deboli del Laplaciano, decomposizione spettrale del Laplaciano in $H^1_0(\Omega)$.

La diseguaglianza di Cacciopoli, diseguaglianze di Sobolev senza condizioni al bordo, stime L^∞ per autofunzioni del Laplaciano. Regolarizzazione e regolarità C^∞ delle autofunzioni deboli del Laplaciano, il Lemma di Weyl. La soluzione fondamentale del Laplaciano e regolarità $C^\infty(\Omega)$.

Testi consigliati

[1] H. Brezis, *Analyse founctionelle*. Masson, (1983).
[2] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*. Boringhieri, (1974).
[3] , .

Bibliografia supplementare

[4] E. Lieb, M. Loss, *Analysis*. AMS, (1997).
[5] W. Rudin, *Functional Analysis*. Mc Graw Hill, (1991).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		☐ SI	■ NO
- esame finale	scritto	■ SI	☐ NO
	orale	■ SI	☐ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		☐ SI	■ NO