AM1 Analisi Matematica (1^0 Modulo)
A.A. 1999/2000

Prof. Gianni Mancini

Funzioni reali di variabile reale: limiti e derivate

1. Il sistema dei numeri reali

Struttura algebrica, struttura d'ordine. La diseguaglianza triangolare. Il sottoinsieme $\mathbb{N}$dei naturali, proprietà di minimo, il Principio di induzione. Un'applicazione: la diseguaglianza di Bernoulli. I sottoinsiemi degli interi, dei razionali. L'assioma di completezza: ogni insieme superiormente limitato ha estremo superiore. Prime conseguenze: la proprieta Archimedea, densita dei razionali, esistenza e unicita) della radice n-esima. Potenze con esponente razionale, reale (la funzione esponenziale).

2. Limiti di funzioni reali di variabile reale

Generalita sulle funzioni: dominio, immagine, iniettività, suriettività, funzione inversa, monotonia. Un esempio: la funzione logaritmo come inversa della funzione esponenziale. Limite superiore, inferiore; una funzione ha limite se e solo se limite inferiore e limite superiore coincidono. Operazioni sui limiti. Limiti a destra, a sinistra: il limite c'è se e solo se i limiti a destra e sinistra esistono e sono uguali. Limiti e ordinamento: le diseguaglianze si conservano al limite, la permanenza del segno, il principio di confronto. Limiti di funzioni monotone. Limiti di potenze, confronto tra esponenziale e polinomi, crescita logaritmica. Limiti di funzioni composte, calcolo di limiti mediante cambio di variabile. Limiti in forma indeterminata.

3. Successioni di numeri reali

Successioni limitate, monotone, estremo superiore. Limite superiore, inferiore, il limite inferiore e sempre minore del limite superiore. Una successione ha limite se e solo se il limite superiore ed inferiore coincidono. Operazioni sui limiti, limiti e ordinamento. Limiti di successioni monotone. Una applicazione: il numero di Nepero, alcuni fondamentali limiti ad esso connessi. Confronto tra infiniti, infinitesimi. La regola di Cesaro. La condizione necessaria e sufficiente di Cauchy. Sottosuccessioni, ogni successione limitata ha una estratta convergente. Insiemi chiusi, compatti. Limiti di funzioni e limiti di successioni.

4. Serie numeriche: cenni

Successione delle somme parziali, serie convergente, divergente, oscillante. Una serie a termini positivi o converge o diverge. Assoluta convergenza. La serie armonica diverge: la successione delle somme parziali ha una crescita logaritmica. La serie geometrica, la serie armonica generalizzata. La condizione di Cauchy. Prime conseguenze:

il termine n-esimo di una serie convergente va a zero, una serie assolutamente convergente è convergente (ma non viceversa: il caso della serie armonica a segni alterni). Il criterio del rapporto, della radice, il caso in cui $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tende a uno, confronto con la serie armonica generalizzata. Serie telescopica, se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{n+1} - a_n| < +\infty$ allora a_n converge; un' applicazione allo studio di successioni definite per ricorrenza.

5. Continuità

Funzioni continue, continuità per successioni. Somma, prodotto, composizione di funzioni continue. Continuità della funzione inversa. Le funzioni monotone hanno solo (al più un insieme numerabile di) discontinuità di tipo salto. Proprietà globali delle funzioni continue: la proprietà del valore intermedio, il teorema di Weierstrass.

6. Derivabilità

Derivabilità e derivata, derivata della somma, del prodotto, del quoziente. Derivazione di funzioni composte, derivabilità e derivata della funzione inversa. Le inverse delle funzioni circolari, le inverse delle funzioni iperboliche e loro derivate. Significato geometrico di derivata, retta tangente, differenziabilità. La derivata si annulla nei punti di minimo (massimo) liberi: i teoremi di Rolle, del valor medio, degli accrescimenti finiti. Qualche applicazione: monotonia e segno della derivata, funzioni a derivata nulla in un intervallo, le funzioni con derivata continua sono localmente Lipschitziane, la funzione derivata ha la proprietà del valore intermedio. La prima regola de L'Hopital, ed anche la seconda. Derivate successive, il Polinomio di Taylor, la formula di Taylor con il resto secondo Peano. Studio di limiti ed una applicazione alla ricerca di massimi/minimi liberi. La formula di Taylor con il resto secondo Lagrange, applicazione allo studio della convessità.

Testi consigliati

[1] Marcellini P., C. Sbordone, *Analisi Matematica Uno*. Ed. Liguori, (1998).
[2] Cecconi-Piccinini-Stampacchia, *Esercizi e problemi di Analisi Matematica, Volume Uno*. Ed. Liguori, (1996).
[3] Enrico Giusti, *Analisi Matematica I*. Boringhieri, (1996).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		☐ SI	■ NO
- esame finale	scritto	☐ SI	■ NO
	orale	☐ SI	■ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		■ SI	☐ NO