

# AL440 Teoria dei Gruppi

A.A. 2011/2012

Prof. Francesca Tartarone

1. Definizione di gruppo. Prime proprietà. Sottogruppi. Intersezione ed unione di sottogruppi. Gruppi ciclici e sottogruppi di gruppi ciclici. Gruppi di permutazioni e gruppi diedrali: prime proprietà. Numero massimo di generatori di un gruppo finito. Numero massimo di gruppi non isomorfi di cardinalità  $n$  fissata. Gruppo dei quaternioni. Gruppi di ordine 6. Automorfismi di gruppi: esempi. Teorema di Cayley.

La relazione di coniugio in un gruppo. Il gruppo degli automorfismi interni. Il centro di un gruppo  $G$ , il centralizzatore di un elemento  $g \in G$ . Relazione fra l'indice del centralizzatore di  $g$  e la cardinalità della classe di coniugio di  $g$ . Il coniugio in  $S_n$ . Descrizione delle classi di coniugio attraverso la struttura ciclica dei rappresentanti e calcolo della loro cardinalità. Il coniugio in  $S_n$ . Normalizzatore e centralizzatore di un sottogruppo. Relazione di coniugio per i sottogruppi e sue connessioni con l'indice del normalizzatore. Il normalizzatore ed il centralizzatore di una permutazione di ordine  $n$  in  $S_n$ . Automorfismi di un sottogruppo  $H$  di un gruppo  $G$  e loro relazioni con gli automorfismi interni di  $G$ . Il più grande sottogruppo normale contenuto in un sottogruppo  $H$  di un gruppo  $G$ . I gruppi di ordine  $2p$ . Prodotti diretti e semidiretti di gruppi.

Il programma di Holder. Serie di composizione.

Unicità della serie di composizione di un gruppo finito  $G$  (teorema di Jordan-Holder).

Gruppi di ordine 8.

Semplicità del gruppo alterno  $A_n$ .

I  $p$ -gruppi finiti tali che ogni elemento diverso da 1 ha ordine  $p$ .

I tre teoremi di Sylow: esempi ed applicazioni. I gruppi di Sylow di un sottogruppo  $H$  di  $G$ . Normalizzatore di un sottogruppo in un  $p$ -gruppo. I gruppi semplici di ordine 60. La classificazione dei gruppi di ordine 12.

Formula di Burnside sul numero delle orbite di un'azione di un gruppo finito.

Generatori e relazioni. Sistemi di generatori e gruppi finitamente generati. Sottogruppo di Frattini di un gruppo  $G$  e sottogruppi massimali. Argomento di Frattini. Sottogruppo di torsione di un gruppo abeliano. Struttura dei gruppi abeliani finitamente generati. Come risalire da una presentazione finita di un gruppo abeliano alla sua struttura di somma diretta di gruppi ciclici. Gruppi liberi. Un gruppo libero è proiettivo. Gruppi iniettivi e divisibili (teorema di equivalenza).

Gruppi nilpotenti. Serie centrale ascendente e discendente. Esempi (gruppi abeliani,  $S_n$ , ecc...). Sottogruppo di Frattini e quoziente  $G/\phi(G)$  nei gruppi nilpotenti. Teorema

di caratterizzazione (prodotto diretto dei  $p$ -Sylow, ogni sottogruppo normale massimale, i normalizzanti crescono). Esempi. Definizione di gruppo risolubile.

Teorema di Hall per i gruppi risolubili. Serie di composizione di un gruppo risolubile finito.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] ANTONIO MACHÌ, *Gruppi. Una introduzione a idee e metodi della Teoria dei Gruppi*. SPRINGER VERLAG, (2007).  
[2] MICHAEL ARTIN, *Algebra*. Bollati-Boringhieri, (1997).

## BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [3] I. N. HERSTEIN, *Algebra*. Editori Riuniti, (2003). .

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO