

AM7 Equazioni alle derivate parziali 1

A.A. 2009/2010

Prof. Gianni Mancini

1. Teoria classica delle equazioni ellittiche

Identità di Green e rappresentazione integrale di funzioni regolari. Soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace e soluzioni deboli dell'equazione di Poisson. Funzioni armoniche, proprietà di media, il principio del massimo. Analicità delle funzioni armoniche. Unicità per il problema di Dirichlet. Teorema di Liouville. Stime a priori, stime interne per il gradiente e proprietà di compattezza per successioni di funzioni armoniche. La disuguaglianza di Harnack. Funzione di Green, nucleo di Poisson. Integrale di Poisson e prolungamento armonico. Singolarità rimovibili di funzioni armoniche. Il metodo di Perron ed esistenza della soluzione per il problema di Dirichlet. Continuità fino al bordo della soluzione col metodo delle barriere. Stime integrali alla Cacciopoli. Operatori ellittici del secondo ordine a coefficienti costanti. Il principio di massimo debole ed il Lemma di Hopf. Il principio di massimo forte e il principio del confronto. Unicità per il problema di Dirichlet. Stime a priori e metodo di continuazione di Schauder.

2. Principi di massimo e simmetrie

Un Lemma di Serrin, il principio di massimo su domini stretti. Il principio del massimo di Alexandroff e il principio del massimo su domini piccoli. Simmetria delle soluzioni del problema di Dirichlet omogeneo su domini limitati con simmetrie per l'equazione di Poisson semilineare.

3. Spazi di Sobolev

Definizione delle derivate deboli e degli spazi di Sobolev in dimensione uno e in dimensione superiore. Densità delle funzioni lisce. Operatori di prolungamento. Disuguaglianze di Sobolev. I teoremi di immersione e di immersione compatta.

4. Teoria debole delle equazioni ellittiche

Ripasso di spazi di Hilbert. Proiezione su un convesso chiuso. Teoremi di Riesz, Stampacchia e Lax-Milgram. Basi hilbertiane. Soluzioni deboli e formulazione variazionale di alcuni problemi ellittici. Esistenza e unicità della soluzione debole. Regolarità all'interno; regolarità fino al bordo (cenni). Introduzione alla convergenza debole in spazi di Hilbert. Semicontinuità inferiore debole della norma. Compattezza debole per successioni della palla unitaria. Formulazione variazionale

e soluzioni deboli di alcuni problemi ellittici non lineari. L'identità di Pohozaev e un risultato di non esistenza. Il metodo concentrazione-compattatezza ed estremali per la costante di Sobolev in \mathbf{R}^n .

TESTI CONSIGLIATI

- [1] L.C.EVANS, AMS GRADUATE STUDIES IN MATH., *PDE*. AMS (1998).
- [2] Q.HAN, F.LIN, *Elliptic PDE*. Courant Lectures Notes, New York University (2000).
- [3] D. GILBARG, N. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer (1983).
- [4] H. BREZIS, *Analisi Funzionale-Teoria e applicazioni*. Liguori Editore (1986).

MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO