GE3 Geometria 3
A.A. 2008/2009

Prof. Edoardo Sernesi

Topologia generale ed elementi di topologia algebrica

1. Topologia generale Spazi metrici. Spazi topologici. Intorni, basi, basi locali, assiomi di numerabilità, interno, esterno, frontiera. Successioni. Punti di accumulazione, derivato, insiemi chiusi, chiusura. Insiemi densi, spazi separabili. Applicazioni continue, aperte, omeomorfismi, omeomorfismi locali.

Sottospazi. L'n-cubo, l'n-sfera, l'n-disco, l'n-simplesso. La proiezione stereografica.

Il prodotto topologico di un numero finito di spazi. Basi e sottospazi di un prodotto. Caratterizzazione di applicazioni continue da e verso un prodotto topologico.

Relazioni di equivalenza. Topologia quoziente. Identificazioni. Caratterizzazione della topologia quoziente per mezzo degli aperti saturi. Il cilindro. Il nastro di Moebius. Lo spazio proiettivo reale.

Spazi T1 e spazi di Hausdorff.

Spazi compatti. Compatti in spazi di Haudorff. Caratterizzazione dei compatti di $\mathbb{R}$. Sottoinsiemi infiniti in spazi compatti. Compattezza e applicazioni continue. Compattezza del prodotto topologico finito di spazi compatti. Caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di uno spazio euclideo.

Spazi connessi. Caratterizzazione dei connessi di $\mathbb{R}$. Componenti connesse. Chiusura di connessi. Prodotto di spazi connessi. Connessione per archi. Prodotto di spazi connessi per archi. Componenti connesse per archi. Locale connessione per archi.

2. Il gruppo fondamentale Omotopia e omotopia relativa di applicazioni continue. Equivalenza omotopica. Spazi contraibili. Composizione di archi e loro equivalenza.

Il gruppo fondamentale. Dipendenza dal punto base. Spazi semplicemente connessi. Proprietà funtoriali del gruppo fondamentale. Gruppo fondamentale e equivalenze omotopiche. Il lemma di sollevamento degli archi e di sollevamento dell'omotopia. Il gruppo fondamentale della circonferenza. Gruppo fondamentale del prodotto di due spazi topologici.

Il teorema del punto fisso per il disco 2-dimensionale. Semplice connessione dell'unione di due aperti semplicemente connessi. Le sfere di dimensione maggiore di uno sono semplicemente connesse.

3. La classificazione delle superfici topologiche Varietà topologiche. Il toro e il piano proiettivo come quozienti di un poligono. La bottiglia di Klein. Poligoni convessi etichettati e superfici topologiche come loro quozienti. Coppie di lati del primo e del secondo tipo. Esistenza di un nastro di Moebius nella superficie quando c'è una coppia del secondo tipo. Multitori e multipiani proiettivi. Il teorema di classificazione delle superfici che sono quozienti di un poligono etichettato.

Triangolazioni e triangolabilità. Ogni superficie topologica è triangolabile (solo enunciato). Le superfici triangolabili compatte sono quozienti di poligoni.

Caratteristica di Eulero-Poincaré. Invarianza per raffinamento. Esistenza di raffinamenti comuni. Invarianza per omeomorfismo. Calcolo della caratteristica di quozienti di poligoni. Somma connessa di superfici. Descrizione come quoziente di poligoni etichettati. Classificazione di superfici in esempi concreti.

Testi consigliati

[1] E. Sernesi, *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, (2001).
[2] E. Sernesi, *Classificazione delle superfici topologiche*. file pdf disponibile online, (2009).

Bibliografia supplementare

[3] J. M. Lee, *Introduction to topological manifolds*. Springer Verlag, (2000).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		■ SI	□ NO
- esame finale	scritto	■ SI	□ NO
	orale	■ SI	□ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		□ SI	■ NO