MA10 Analisi Matematica per le Applicazioni
A.A. 2007/2008

Renato Spigler

1. Generalità

Il Corso si fa riferimento a dei problemi-tipo, che nascono da settori applicativi, spesso di origine industriale, e permettono di introdurre modelli e metodi matematici adeguati. Questi ultimi sono basati soprattutto su equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie o alle derivate parziali di vario tipo (iperboliche, paraboliche o ellittiche). Nel paragrafo seguente si precisano meglio sia le applicazioni considerate che i metodi utilizzati. Un terzo del Corso si è svolto in laboratorio di calcolo, dove gli studenti hanno potuto sviluppare e implementare vari codici, relativamente agli argomenti esposti nelle ore di lezione.

2. In dettaglio

(**1**) Un modello che descrive precipitazione di cristalli in soluzione, di interesse nell'industria fotografica, porta a considerare certe equazioni differenziali ordinarie e sistemi. Si fanno richiami su teoremi di esistenza, unicità e dipendenza continua per tali sistemi e si espongono metodi numerici per la risoluzione numerica di problemi ai valori iniziali (Eulero, Runge-Kutta).

(**2** Un modello adatto a descrivere la diffusione e il trasporto di sostanze inquinanti nell'aria si basa su semplici modelli (iperbolici) di puro trasporto e (parabolici) di trasporto-diffusione, in una variabile spaziale. Si è descritto il metodo delle caratteristiche e il criterio di stabilità di von Neumann per schemi numerici alle differenze finite. Si sono introdotti alcuni specifici schemi, soprattutto espliciti, se ne è studiata la stabilità secondo von Neumann, e si sono utilizzati per la risoluzione numerica dei modelli di diffusione-trasporto esposti.

(**3** Il processo della litografia elettronica permette di introdurre l'equazione del calore in una, due, o più dimensioni, la sua soluzione fondamentale, e la soluzione del problema ai valori iniziali, per il quale si è mostrata l'unicita'. Per stabilire quest'ultimo risultato si è dimostrato un principio di massimo. Per risolvere il problema inverso che si incontra quando si vuole determinare la dose del fascio necessaria per ottenere una data esposizione, si è presentato il metodo di Fourier e della separazione delle variabili. Si sono richiamati i concetti fondamentali relativi alla serie di Fourier, si è introdotto il concetto di "sommabilità secondo Cesaro", dimostrando il teorema di Fejer.

(**4** Lo sviluppo di negativi di pellicole a colori comporta dei processi molto complessi, dove reazioni chimiche e di diffusione-trasporto sono queli dominanti. Un modello semplificato è dato da due sole equazioni accoppiate, una di reazione-doffusione, l'altra ordinaria. Si sono dimostrate alcune forme del pricipio di massimo per una singola equazione parabolica lineare, in una dimensione. Si è introdotto un metodo implicito, alle differenze, per risolvere numericamente tale equazione, analizzandone anche la stabilità secondo von Neumann. Si è fatto un cenno alla "decomposizione LU" per risolvere numericamente sistemi lineari. Infine si è presentato uno schema (implicito) alle differenze per risolvere numericamente il sistema delle due equazioni accoppiate di cui sopra. Si è dimostrato un principio di massimo per equazioni differenziali ordinarie.
(**5** Il funzionamento di un convertotre catalitico, capace di depurare i gas che escono dal tubo di scappamento di un'auto, coinvolge processi di diffusione, trasporto e di reazione chimica. Un modello semplificato consiste in tre equazioni differenziali accoppiate, una di tipo reazione-diffusione e due ordinarie. Il problema più importante è quello del controllo (ottimo), per cui si definisce cosa si intende per "funzione di controllo", "funzione costo", e "insieme (ammissibile) delle funzioni di controllo". Per ottenere informazioni sulla soluzione di questo problema, si considerano dei modelli ulteriormente semplificati, consistenti in due sole equazioni accoppiate, soddistatte dalla temperatura della parte solida del dispositivo e della concentrazione di una sola sostanza nociva (da depurare). Si espongono alcune semplici idee sul Calcolo delle Variazioni, presentando come esempio il "problema della brachistocrona", si stabilisce una formula di rappresentazione per la soluzione dell'equazione del calore non omogenea, in una o più dimensioni, e si fa un cenno alla risoluzione del problema diretto (mentre quello di controllo è un problema inverso) mediante approssimazioni successive. In tal modo si può stabilire esistenza (solo citata) e unicità della soluzione. Si presentano poi due schemi, uno esplicito ed uno implicito, alle differenze finite, per risolvere numericamente il sistema delle due equazioni di cui sopra, per varie scelte della funzione di controllo. Si discute infine come determinare il controllo, almeno in certi casi ulteriormente semplificati.
(**6** Il funzionamento di una macchina fotocopiatrice, ovvero l' "elettrofotografia", presenta analogie ma anche profonde diffrenze rispetto al caso della fotografia tradizionale. Si possono distinguere le due fasi, di trasformazione di un'immagine ottica (un documento da fotocopiare) in una elettrica, e poi di questa in una nuova immagine ottica (che viene fissata permanentemente su di un supporto cartaceo). Data la natura dei processi coinvolti, intervengano sempre dei campi elettrici, e difatti le equazioni del modello, anche qui necessariamente semplificato, si compongono di un'equazione di continuità (trasporto ed eventualmente diffusione) per la densità di certe cariche elettriche, accoppiata ad una equazione di Poisson per il

potenziale elettrico. Tra le condizioni da imporre a queste grandezze, compare una condizione di discontinuità per una componente del campo elettrico, a causa di una certa distribuzione superficiale di carica. Si studia a parte l'equazione di Poisson (che è un esempio di equazione di tipo ellittico) in due dimensioni, soggetta a dati al contorno, col metodo di Fourier e mediante differenze finite. In quest'ultimo approccio si mette in evidenza un principio di massimo per l'"equazione di Laplace discreta" e si descrive un metodo iterativo (di tipo Jacobi) per la risoluzione numerica efficiente del sistema lineare ottenuto con le differenze finite di prima. Si accenna al caso di "condizioni di trasmissione" per equazioni ordinarie o alle derivate parziali. Si presenta poi uno schema per la risoluzione del modello per la densità di carica, il potenziale elettrico e la densità di carica superficiale, che determinano la creazione di un'immagine elettrica del documento originale, limitandosi al caso unidimensionale.
(**7**) Il processo che porta dall'immagine elettrica alla fotocopia su carta è ancora governato da equazioni differenziali accoppiate, in sostanza un'equazione di Poisson in un dominio limitato (dove si deposita il toner) e un'equazione di Laplace in una zona limitata sufficientemente estesa, che circonda il dominio precedente. Vi sono però dei dati al contorno non standard, quali una condizione di trasmissione su di una porzione della frontiera del dominio occupato dal toner, ed una "frontiera libera" che delimita parte del dominio medesimo. Quest'ultima rappresenta un'incognita addizionale che richiede una condizione in piu', la quale deve essere imposta. Data la complessità del problema ci si limita a suggerire di risolverlo nei casi limite in cui la frontiera libera non compare. Per spiegare l'impossibilità di ottenere una riproduzione fedele del documento originale, si presentano alcune proprietà delle funzioni armoniche nel piano, quali l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet (la cui esistenza si cita senza dimostrare), il principio di riflessione di Schwarz, e la proprietà dell'unicità del prolungamento delle funzioni armoniche.
(**7** Si illustra un modello matematico che descrive la crescita di tumori solidi. La Matematica può fornire un valido aiuto in certi aspetti della ricerca medica oncologica, cercando di descrivere quantitativamente i meccanismi che governano la crescita di certi tipi di tumore, cercando di prevederne le dimensioni ed altre caratteristiche, purché si disponga di sufficienti conoscenze fondamentali e dati sperimentali. Si illustra un modello dapprima nella sua versione più semplice, basato su di una singola equazione differenziale ordinaria, che fornisce in funzione del tempo il raggio di un tumore che cresce restando di forma sferica. Si introduce poi una struttura spaziale, per tumori non vascolarizzati, il che porta ad un sistema di due equazioni accoppiate, una di tipo diffusivo per la concentrazione del nutriente il tumore, l'altra ordinaria ma contenente un termine integrale per il

raggio di cui sopra. La risoluzione numerica di questo sistema fornisce importanti indicazioni che possono essere validate o meno sperimentalmente.

Testi consigliati

[1] A. Friedman and W. Littman, *INDUSTRIAL MATHEMATICS. A Course in Solving Real-World Problems*. SIAM, Philadelphia, (1994).
[2] H. Byrne, *The Role of Mathematics in Solid Tumor Growth*. Mathematics Today, April 1999, pp. 48-53., (1999).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		☐ SI	■ NO
- esame finale	scritto	■ SI	☐ NO
	orale	☐ SI	■ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		■ SI	☐ NO

Lo studente può scegliere se sviluppare un lavoro anche di gruppo per approfondire un argomento del Corso o argomento ad esso collegato, concordandolo col Docente, nel qual caso l'esame finale consiste in una semplice prova scritta.

Diversamente, lo studente può sostenere soltanto un esame scritto, ma più approfondito.

Chi non avesse frequentato il laboratorio per almeno i due terzi delle ore previste, dovrà rispondere a delle domande aggiuntive in sede di esame scritto.