GE5 Superfici di Riemann I

A.A. 2004/2005

prof. Edoardo Sernesi

1.

Superfici topologiche e superfici differenziabili. Costruzione di superfici compatte e connesse come quozienti di poligoni etichettati. Esempi: multitori, multipiani proiettivi; La bottiglia di Klein. Esistenza di nastri di Moebius e coppie del II tipo. Ogni superficie compatta e connessa quoziente di un poligono etichettato omeomorfa alla sfera o a un multitoro o a un multipiano proiettivo. Triangolazioni. Ogni superficie compatta connessa e triangolabile quoziente di un poligono etichettato. Esistenza di triangolazioni (solo enunciato). Caratteristica di Eulero-Poincare di una triangolazione di una superficie compatta. Invarianza della caratteristica. Calcolo della caratteristica della superficie quoziente di un poligono etichettato. Orientabilità. Classificazione delle superfici compatte e connesse.

Cammini, cammini chiusi, Omotopia di cammini. Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico puntato. Proprietà funtoriali del gruppo fondamentale. Spazi semplicemente connessi. Teorema di unicità del sollevamento. Esistenza e unicità del sollevamento degli archi e dell'omotopia. Iniettività dell'omomorfismo tra gruppi fondamentali indotto da un rivestimento. Rivestimenti universali. Relazione tra esistenza di sollevamenti e inclusione delle immagini dei gruppi fondamentali. Il gruppo fondamentale di una circonferenza.

Richiami sulla teoria delle funzioni analitiche. Proprietà dell'ordine di una funzione analitica. Isomorfismi analitici ed isomorfismi analitici locali. L'inversa formale di una serie e le sue proprietà. Caratterizzazione degli isomorfismi analitici locali. Teorema dell'applicazione aperta. Indice di ramificazione di una funzione analitica in un punto e sue proprietà. La serie binomiale.

Superfici di Riemann. La retta proiettiva. Tori complessi. Orientabilità delle superfici di Riemann. Applicazioni olomorfe tra superfici di Riemann e loro proprietà. exp non si estende all'infinito. Il teorema fondamentale dell'algebra. Indice di ramificazione. Rivestimenti ramificati e loro proprietà geometriche. La formula di Riemann-Hurwitz. Funzioni meromorfe su una superficie di Riemann. Funzioni razionali sulla sfera di Riemann. Il teorema di Liouville. Il teorema delle funzioni implicite. Cenni su risultanti e discriminanti. Funzioni algebriche e loro esistenza. La superficie di Riemann di una curva algebrica piana. Calcolo del genere nel caso nonsingolare (cenni). Esistenza di funzioni meromorfe non costanti.

Funzioni algebriche. Il teorema delle funzioni implicite. Risultante di due polinomi e discriminante di un polinomio. Punti regolari ed eccezionali di un polinomio in due variabili. Funzioni algebriche associate ad un punto regolare. L'esempio delle due determinazioni della radice quadrata di z. Esistenza e unicità della struttura di superficie di Riemann su un rivestimento topologico di una superficie di Riemann. Grafici di funzioni come superfici di Riemann. La struttura di superficie di Riemann su una curva piana affine nonsingolare. Curve piane proiettive. Nonsingolarità. Il teorema di Eulero sui polinomi omogenei. La struttura di superficie di Riemann su una curva piana proiettiva nonsingolare. Generalità sulle singolarità delle curve piane. Flessi di una curva piana affine e indice di ramificazione della proiezione. Funzioni meromorfe sulle curve piane affini nonsingolari. La formula di Plucker per il genere di una curva piana proiettiva nonsingolare. Superfici di Riemann iperellittiche.

Funzioni ellittiche. Corrispondenza con le funzioni meromorfe sul toro definito dal reticolo dei periodi. La funzione $\wp$ di Weierstrass e sue proprietà. Le serie di Eisenstein. Sviluppo di Laurent della funzione p di Weierstrass. La cubica piana associata alla funzione $\wp$ e Isomorfismo tra un toro e la superficie di Riemann della cubica piana parametrizzata da $(\wp, \wp')$.

Descrizione delle applicazioni olomorfe tra tori complessi. Automorfismi di tori complessi. Descrizione delle classi di isomorfismo di tori complessi come classi di equivalenza di punti del semipiano superiore H rispetto a trasformazioni in $SL(2, Z)$. La funzione modulare $J(z)$ e sua invarianza rispetto a $SL(2, Z)$. Il dominio fondamentale F in H rispetto a $SL(2, Z)$. Le proprietà di F. Le trasformazioni $T(z) = 1 + z$ e $S(z) = -1/z$ generano $SL(2, Z)$. Le serie di Eisenstein sono funzioni olomorfe su H. La funzione modulare J è olomorfa. La funzione J assume tutti i valori reali sul bordo di F. La funzione J stabilisce una corrispondenza 1-1 tra le orbite di $SL(2, Z)$ in H e i punti di C. Punti di ramificazione della funzione J. Il teorema di Picard: una funzione intera non costante omette al più un valore. Birapporto di quattro punti di una retta proiettiva e sue dipendenza dalle loro permutazioni. Costruzione di una funzione del birapporto indipendente dall'ordine. Coincidenza tra la funzione modulare e la funzione costruita in precedenza sul birapporto dei punti di diramazione della funzione $\wp$ di Weierstrass.

Testi consigliati

[1] E. Sernesi, *Appunti del corso GE5 a.a. 2003/2004* . in rete, ().
[2] G.A. Jones - D. Singerman, *Complex functions, An algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge U.P.,

Bibliografia supplementare

[3] S. Lang, *Complex Analysis, Springer GTM* . Springer Verlag, ().
[4] , . , ().

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		☐ SI	■ NO
- esame finale	scritto	☐ SI	■ NO
	orale	■ SI	☐ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		■ SI	☐ NO

L'esame può essere sostenuto esponendo una tesina orale scelta tra quelle disponibili consultando la pagina web del corso.