

# GE3 Geometria (3<sup>o</sup> Modulo)

A.A. 2000/2001

Prof. Giulio Campanella

## 1. Spazi metrici

Distanza euclidea in  $R^n$ . Definizione di spazio metrico ed esempi. Dischi ed aperti in uno spazio metrico e relative proprietà. Applicazioni tra spazi metrici: continuità ed uniforme continuità. Metriche topologicamente equivalenti. Continuità delle applicazioni lineari. Omeomorfismi ed isometrie tra spazi metrici. Convergenza di successioni.

## 2. Generalità sugli spazi topologici

Definizione di spazio topologico ed esempi: la topologia euclidea, la topologia banale, la topologia discreta, la topologia cofinita. Spazi metrizzabili. Confronto tra topologie. Basi, sottobasi e relative caratterizzazioni. Intorni di un punto, sistemi completi di intorni e basi locali di un punto. Primo e secondo assioma di numerabilità. Convergenza di successioni in uno spazio topologico.

Chiusi e relative proprietà. Interno, esterno e frontiera di un insieme. Chiusura e punti aderenti di un insieme. Punti di accumulazione e derivato di un insieme. Insiemi densi e spazi separabili. Relazioni tra separabilità, metrizzabilità ed assiomi di numerabilità. Esempi. La topologia di Zariski di  $R^2$ .

## 3. Applicazioni continue

Definizione e caratterizzazioni della continuità. Applicazioni aperte e chiuse. Omeomorfismi e relative caratterizzazioni. Proprietà topologiche e relativi esempi. La topologia immagine diretta e la topologia delle controimmagini di un'applicazione. La topologia euclidea delle matrici a valori in  $R$ .

## 4. Sottospazi topologici

La topologia indotta su un sottoinsieme: definizione, proprietà ed esempi. Immersioni topologiche; Omeomorfismi locali. Incollamento di applicazioni continue. Definizione di limite di un'applicazione. Unicità del limite in spazi metrizzabili.

## 5. Prodotto di spazi topologici

La topologia prodotto di due spazi topologici. Basi, sottobasi, intorni e chiusi di tale topologia. Caratterizzazione della topologia prodotto tramite la continuità delle proiezioni canoniche. Il prodotto di una famiglia arbitraria di spazi topologici.

## 6. La topologia degli spazi euclidei

Il gruppo degli omeomorfismi di  $R^n$  ed i suoi sottogruppi notevoli. Congruenze tra sottospazi euclidei della stessa dimensione. Similitudini tra dischi e tra cubi. La proiezione stereografica della sfera bucata. Il toro come prodotto di due circonferenze. Omeomorfismi tra  $S^{n-1} - \{N, S\}$  e  $S^{n-2} \times R$  e tra  $R^n - \{0\}$  e  $S^{n-1} \times R$ .

## 7. Spazio topologico quoziente e identificazioni

Definizione di topologia quoziente modulo una relazione di equivalenza. Identificazioni e loro relazioni con i quozienti. Esempi: lo spazio topologico che identifica un sottoinsieme ad un punto; il cilindro, il nastro di Moebius e la bottiglia di Klein come quozienti di un quadrato. Lo spazio proiettivo reale e sue proprietà topologiche. La relazione di antipodalità. Il piano proiettivo reale come quoziente di un quadrato.

## 8. Proprietà di separazione

Gli assiomi di separazione  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ . Esempi. Caratterizzazioni e proprietà degli spazi  $T_1$  e  $T_2$ . Ogni spazio metrizzabile è  $T_4$ . Cenni sul lemma di Uryshon

## 9. Compattezza

Definizione ed esempi di spazio topologico compatto. Proprietà della compattezza. La compattezza negli spazi  $T_2$ . Il prodotto di due compatti è compatto. Caratterizzazione dei compatti in  $R^n$ . Teorema di Weierstrass. Compattificazioni: definizione ed esempi; compattezza equivalenti; compattezza di Alexandroff. Il gruppo ortogonale è compatto. Spazi topologici.

Varietà topologiche (definizione ed esempi). Spazi topologici di Lindelöf (ogni spazio  $N_2$  è di Lindelöf). Spazi localmente compatti. Spazi sequenzialmente compatti, numerabilmente compatti, compatti secondo Bolzano-Weierstrass: relazioni tra tali nozioni di compattezza e loro equivalenza negli spazi metrizzabili. Successioni di Cauchy in uno spazio metrico. Ogni spazio metrico compatto è completo.

## 10. Connessione e connessione per archi

Definizione ed esempi di spazio topologico connesso. Caratterizzazione dei connessi della retta euclidea. Proprietà della connessione. La relazione di connessione e le componenti connesse. Il prodotto di spazi connessi è connesso. Spazi totalmente sconnessi e loro proprietà. Classificazione degli intervalli della retta euclidea rispetto alla relazione di omeomorfismo. Il teorema del punto fisso (in dimensione 1). Spazi localmente connessi. Lo spazio 'flea and comb'.

Definizione di arco e di connessione per archi (abbr. AC). Ogni spazio AC è connesso, ma il viceversa è generalmente falso. Proprietà della connessione per archi. Il prodotto di AC è AC. Componenti connesse per archi. Un aperto di  $R^n$  è connesso sse è AC sse è connesso per poligoni. Spazi localmente AC. Una varietà topologica è connessa sse è AC.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] E.SERNESI, *Geometria II*. Boringhieri (Torino), (1994).  
 [2] G.CAMPANELLA, *Esercizi di Topologia Generale*. Aracne (Roma), (1992).

## BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [3] V.CHECCUCCI, A.TOGNOLI, E.VESENTINI, *Lezioni di Topologia Generale*. Feltrinelli (Milano), (1968).  
 [4] S.LIPSCHUTZ, *Topologia*. Etas Libri (Milano), (1979).  
 [5] J.DUGUNDJI, *General Topology*. Allyn-Bacon (Boston), (1966).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO